Obsah:

1 Testování statistických hypotéz

Pokud potřebujeme např. ověřit , jestli náhodný výběr byl proveden ze základního souboru se známým parametrem, nebo jestli se charakteristiky získané z několika výběrů téhož základního souboru navzájem výrazně liší, pak provádíme tzv. **testy významnosti statistických hypotéz**.

Obecný postup testování statistických hypotéz:

- **Formulace nulové hypotézy H_0 a alternativní hypotézy H_1**

Nulová hypotéza H_0 je předpoklad o existenci základního souboru s jistým parametrem Θ_0. Závažná je v této souvislosti formulace tzv. alternativní hypotézy H_1 tj. hypotézy, kterou přijmeme, když neplatí nulová hypotéza. Je rozhodující pro určení jednostranné nebo oboustranné kritické hodnoty testovacího kriteria. Formulace hypotéz o neznámém parametru Θ může být:

1) $H_0 : \Theta = \Theta_0$, $H_1 : \Theta \neq \Theta_0$, pak přichází v úvahu oboustranný test, oboustranný test se vymezuje tehdy, neexistuje-li důvod, proč by testovací statistika (testovací kriterium) měla mít buď jen kladné, nebo jen záporné znaménko.

2) $H_0 : \Theta = \Theta_0$, $H_1 : \Theta > \Theta_0$, nebo $H_0 : \Theta = \Theta_0$, $H_1 : \Theta < \Theta_0$, pak v obou případech použijeme jednostranný test.

- **Volba hladiny významnosti α**

- **Volba testovacího kritéria**

Testovací kritérium je zvolená funkce, obsahující testovaný výběrový parametr. (Zvolenou funkcí může být např.: rozdělení χ^2, studentovo t-rozdělení, Fisherovo F-rozdělení) Hladina významnosti α je pravděpodobnost, že hodnota testovacího kritéria překročí určitou kritickou hodnotu. Prakticky se nejčastěji volí $\alpha = 0{,}05$ nebo $\alpha = 0{,}01$. Hodnoty testovacího kriteria, které se vyskytnou s pravděpodobností menší než α se nazývají statisticky významné.

- **Určení rozdělení pravděpodobnosti testovacího kritéria a výpočet kritických hodnot (oboustranných nebo jednostranných) pro hladinu významnosti α**

- **Porovnat vypočtenou a kritickou hodnotu testovacího kritéria a vyslovit závěr o testované hypotéze H_0**

Při testování nulové hypotézy se můžeme dopustit dvou druhů chyb:

1) chyby prvního druhu, tj. chyby, že zamítáme nulovou hypotézu, ačkoliv je ve skutečnosti správná – pravděpodobnost padnutí kritické hodnoty testovacího kriteria mimo obor nulové hypotézy je rovna právě hladině významnosti α

2) chyby druhého druhu, tj. chyby, že nezamítáme nulovou hypotézu, ačkoliv je nesprávná – její pravděpodobnost označíme β

O vzájemném vztahu obou druhů chyb platí, že za neměněných podmínek snižování pravděpodobnosti chyby jednoho druhu vede ke zvyšování pravděpodobnosti chyby druhého druhu. Snahou je minimalizovat obě chyby.

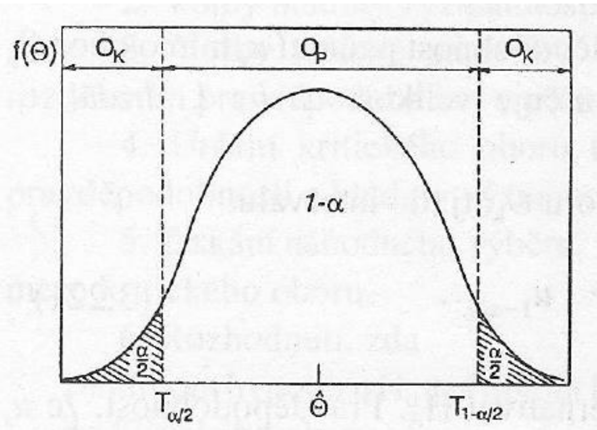
<u>V případě, že přijímáme nulovou hypotézu:</u>
Pravděpodobnost, že se vyvarujeme chyby I. druhu, je $(1-\alpha)$. S touto pravděpodobností činíme správné rozhodnutí o ověřované hypotéze.

<u>V případě, že přijímáme alternativní hypotézu:</u>
Pravděpodobnost, že se vyvarujeme chyby II. druhu, je $(1-\beta)$. S touto pravděpodobností činíme správné rozhodnutí o ověřované hypotéze.

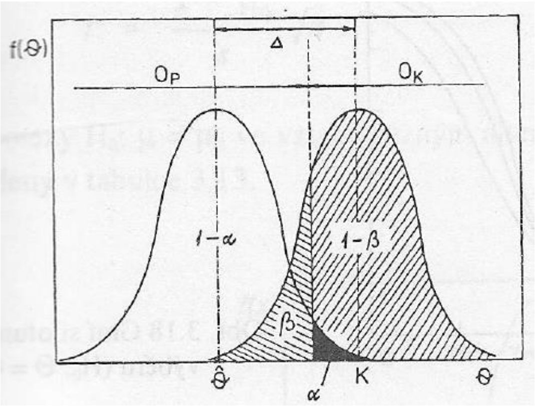
Zároveň pravděpodobnost $(1-\beta)$ nazýváme ***silou testu***. Síla testu ukazuje naději, s jakou test zjistí, že testovaná nulová hypotéza H_0 neplatí a platí alternativní hypotéza H_A.

Velikost síly testu je ovlivněna <u>rozsahem výběru</u>: čím větší je rozsah výběru, tím více informací o skutečnosti se využívá, a tím s větší pravděpodobností zamítneme neplatnou nulovou hypotézu ve prospěch alternativní.

Znázornění kritických oblastí pro oboustranné testy.
O_P … přijato
O_K … zamítnuto



Vztah mezi chybou I. druhu α a II. druhu β pro případ jednostranné hypotézy.
O_P … přijato
O_K … zamítnuto



1.1 *Ověřování hypotézy o střední hodnotě základního souboru s normálním rozdělením*

Testujeme hypotézu, že náhodný výběr (který charakterizujeme výběrovým průměrem x) je proveden ze základního souboru (který je charakterizovaný střední hodnotou $E(x) = \overline{X}$).
Odlišíme případ, kdy známe a neznáme základní střední chybu σ:

a) <u>Známe základní střední chybu σ</u>

<u>Formulace nulové hypotézy</u>: $H_0 : E(x) = \overline{X}$

<u>Nejčastěji používaná formulace alternativní hypotézy</u>: $H_1 : E(x) \neq \overline{X}$

Budeme tedy provádět oboustranný test, testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\left|x - \overline{X}\right|}{\sigma_x} = \frac{\left|x - \overline{X}\right|}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

Veličina t má normální rozdělení. Pro hladinu významnosti α najdeme z tabulek kritickou hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

V případě, že:

$t \rangle t_{\frac{\alpha}{2}}$ … zamítneme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a přijmeme alternativní hypotézu

$t \langle t_{\frac{\alpha}{2}}$ … nezamítneme nulovou hypotézu na hladině významnosti α

b) <u>Neznáme základní střední chybu σ</u>

V případě, že neznáme σ, nahradíme ji výběrovou střední chybou:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \text{ kde } v_i = x - x_i$$

<u>Formulace nulové hypotézy</u>: $H_0 : E(x) = \overline{X}$

<u>Nejčastěji používaná formulace alternativní hypotézy</u>: $H_1 : E(x) \neq \overline{X}$

Budeme opět provádět oboustranný test, testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{\left|x - \overline{X}\right|}{m_x} = \frac{\left|x - \overline{X}\right|}{m} \cdot \sqrt{n}$$

Veličina t má *t-studentovo* rozdělení pro $n' = n - 1$ stupňů volnosti. Pro hladinu významnosti α najdeme z tabulek pro oboustranný test přímo kritickou hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$.

V případě, že:

$t \rangle t_{\frac{\alpha}{2}}$ … zamítneme nulovou hypotézu na hladině významnosti α a přijmeme alternativní hypotézu

$t \langle t_{\frac{\alpha}{2}}$ … nezamítneme nulovou hypotézu na hladině významnosti α

1. Příklad:

Byl proveden náhodný výběr o rozsahu $n = 25$ ze základního souboru s normálním rozdělením $N(200;900)$. Posuďte, zda výběr s výběrovým průměrem $x = 220$ odpovídá výběru z normálního rozdělení základního souboru. Hladinu významnosti volte:

a) $\alpha = 0{,}05$

b) $\alpha = 0{,}01$

Řešení:

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : E(x) = 200$

Nejčastěji používaná formulace alternativní hypotézy: $H_1 : E(x) \neq 200$

Budeme provádět oboustranný test, testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{|x - \overline{X}|}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{|220 - 200|}{30} \cdot \sqrt{25} = 3{,}33$$

Z tabulek normálního rozdělení najdeme kritickou hodnotu pro:

$\alpha = 0{,}05$, $n = 25$ hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$ … $t_{0,025} = 1{,}96$

$\alpha = 0{,}01$, $n = 25$ hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$ … $t_{0,005} = 2{,}58$

Porovnáním zjistíme:

při $\alpha = 0{,}05$ … $t > t_{\frac{\alpha}{2}}$ … $3{,}33 > 1{,}96$

při $\alpha = 0{,}01$ … $t > t_{\frac{\alpha}{2}}$ … $3{,}33 > 2{,}58$

Vyslovíme závěr: zamítáme nulovou hypotézu $H_0 : E(x) = 200$ a přijímáme alternativní hypotézu $H_1 : E(x) \neq 200$. Tzn., že výběr nebyl proveden ze základního souboru $N(200;900)$.

2. Příklad:

Byl proveden náhodný výběr o rozsahu $n = 25$ ze základního výběru, který má normální rozdělení a je charakterizovaný základním průměrem $\overline{X} = 200$ a odhadem základní střední chyby $m = 34$. Posuďte, zda výběr s výběrovým průměrem $x = 220$ odpovídá výběru z normálního rozdělení základního souboru. Hladinu významnosti volte:

a) $\alpha = 0{,}05$

b) $\alpha = 0{,}01$

Řešení:

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : E(x) = 200$

Nejčastěji používaná formulace alternativní hypotézy: $H_1 : E(x) \neq 200$

Budeme provádět oboustranný test, testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{|x - \overline{X}|}{m} \cdot \sqrt{n} = \frac{|220 - 200|}{34} \cdot \sqrt{25} = 2{,}94$$

Z tabulek *t-studentova* rozdělení najdeme kritickou hodnotu pro oboustranný test:

$\alpha = 0{,}05$, $n' = 24$ hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}} \ldots t_{0{,}025} = 2{,}06$

$\alpha = 0{,}01$, $n' = 24$ hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}} \ldots t_{0{,}005} = 2{,}80$

Porovnáním zjistíme:
při $\alpha = 0{,}05 \quad \ldots \quad t > t_{\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots 2{,}94 > 2{,}06$

při $\alpha = 0{,}01 \quad \ldots \quad t > t_{\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots 2{,}94 > 2{,}80$

Vyslovíme závěr: zamítáme nulovou hypotézu $H_0 : E(x) = 200$ a přijímáme alternativní hypotézu $H_1 : E(x) \neq 200$. Tzn., že výběr nebyl proveden ze základního výběru charakterizovaného základním průměrem $\overline{X} = 200$ a odhadem základní střední chyby $m = 34$.

3. Příklad (str. 180, Meloun, Militký):
Byl proveden náhodný výběr $n_A = 32$ a $n_B = 10$ z rozsáhlejšího (základního) výběru $n = 156$, který byl charakterizován průměrem $\overline{X} = 330{,}43$ a odhadem základní střední chyby $m = 1{,}52$. Posuďte, zda náhodné výběry $n_A = 32$ a $n_B = 10$ odpovídají výběru z rozsáhlejšího výběru $n = 156$. Hladinu významnosti volte:
a) $\alpha = 0{,}05$
b) $\alpha = 0{,}01$

Výběr $n_A = 32$ ze základního výběru:

328,99	329,75	331,62	333,08	333,61	331,25	328,42	330,63
332,17	330,15	331,28	330,92	329,36	329,62	329,61	329,17
330,39	333,47	330,59	330,52	329,49	329,01	331,63	330,64
330,85	326,06	329,92	330,66	328,57	331,45	331,54	332,20

Výběr $n_B = 10$ ze základního výběru:

328,99	329,75	331,62	333,08	330,61	331,35	328,42	330,63
332,17	330,15						

1.2 Ověřování hypotézy o rozptylu v základním souboru s normálním rozdělením

Testujeme hypotézu, že náhodný výběr (charakterizovaný výběrovou střední chybou m) je proveden ze základního souboru (charakterizovaného základní střední chybou σ).
Podle formulace úlohy(alternativní hypotézy) se volí jednostranný nebo oboustranný test.

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : \sigma = \sigma_Z$

Formulace alternativní hypotézy:
a) $H_1 : \sigma \neq \sigma_Z$ …oboustranný test
b) $H_1 : \sigma \rangle \sigma_Z$ …pravostranný test
c) $H_1 : \sigma \langle \sigma_Z$ …levostranný test

Testovacím kriteriem bude:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot m^2 \qquad \text{, kde } m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

Z tabulek rozdělení χ^2 najdeme kritickou hodnotu pro:
a) pro oboustranný test rozdělíme α na levou a pravou stranu grafu rozdělení a z tabulek odečteme kritické hodnoty na levé straně (dolní mez) $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ a na pravé straně (horní mez) $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
b) pro levostranný test bude kritická hodnota $\chi^2_{1-\alpha}$ na levé straně grafu rozdělení
c) pro pravostranný test bude kritická hodnota χ^2_{α} na pravé straně grafu rozdělení

Nulovou hypotézu budeme zamítat, když:
a) při oboustranném testu $\chi^2 \langle \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nebo $\chi^2 \rangle \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
b) při levostranném testu $\chi^2 \langle \chi^2_{1-\alpha}$ (zda se zmenšil rozptyl)
c) při pravostranném testu $\chi^2 \rangle \chi^2_{\alpha}$ (zda se zvětšil rozptyl)

1. Příklad:
V náhodném výběru o rozsahu $n = 25$ byla určena výběrová střední chyba $m = 41$. Posuďte, zda se jedná o výběr ze základního souboru se základní střední chybou $\sigma = 30$ na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Řešení:
Jedná se o oboustranné test.
Formulace nulové hypotézy: $H_0 : \sigma = 30$
Formulace alternativní hypotézy: $H_1 : \sigma \neq 30$ …oboustranný test

Testovacím kriteriem bude:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot m^2 = \frac{24}{900} \cdot 1681 = 44{,}8$$

Z tabulek rozdělení χ^2 najdeme kritickou hodnotu:

na levé straně (dolní mez) $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0{,}975} = 12{,}4$

na pravé straně (horní mez) $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0{,}025} = 39{,}4$

<u>Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:</u>
Má platit: $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \langle \chi^2 \langle \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$, ale neplatí protože $12{,}4 \langle\ 44{,}8 \not\langle\ 39{,}4$ je $\chi^2 \rangle \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$

Zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že výběr není proveden ze základního souboru se základní střední chybou $\sigma = 30$.

<u>2. Příklad:</u>
Stroj pracuje s rozptylem výrobků, charakterizovaným základní střední chybou $\sigma = 30$. Po havárii stroje byla provedena série $n = 25$ výrobků a zjištěna výběrová střední chyba $m = 41$. Posuďte, zda se po havárii zvětšil rozptyl výrobků na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

<u>Řešení:</u>
Formulace nulové hypotézy bude stejná, jako v předchozím příkladě, ale s jinou alternativní hypotézou:
<u>Formulace nulové hypotézy</u>: $H_0 : \sigma = 30$
<u>Formulace alternativní hypotézy</u>: $H_1 : \sigma \rangle\ 30$ ...pravostranný test

<u>Testovacím kriteriem</u> bude:

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot m^2 = \frac{24}{900} \cdot 1681 = 44{,}8$$

<u>Z tabulek rozdělení χ^2</u> najdeme kritickou hodnotu:
na pravé straně (horní mez) $\chi^2_{\alpha} = \chi^2_{0{,}05} = 36{,}4$

<u>Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:</u>
Protože je $\chi^2 \rangle \chi^2_{\alpha}$ … $44{,}8 \rangle\ 36{,}4$ zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že po havárii je rozptyl větší, než rozptyl vyplývající ze základní střední chyby $\sigma = 30$.

1.3 Ověřování hypotézy o rovnosti rozptylů dvou normálně rozdělených základních souborů

Testujeme hypotézu, že dva výběrové rozptyly m_1^2 a m_2^2 ze dvou výběrů o rozsahu n_1 a n_2 odpovídají rozptylům ze dvou základních souborů, pro které platí rovnost základních středních chyb, tedy $\sigma_1 = \sigma_2$. Test se většinou používá jako oboustranný.

Testovacím kritériem je veličina:

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2} \quad \text{, kde} \quad m_1 = \sqrt{\frac{[vv]_1}{n_1 - 1}} \quad \text{a} \quad m_2 = \sqrt{\frac{[vv]_2}{n_2 - 1}}$$

Tato veličina má F-rozdělení s $n_1' = n_1 - 1$ a $n_2' = n_2 - 1$ stupni volnosti. Ve vzorci volíme vždy $m_1^2 \rangle m_2^2$. Z tabulek F-rozdělení najdeme pro zvolenou hladinu významnosti kritickou hodnotu $F_{\frac{\alpha}{2}}$. Nulovou hypotézu zamítáme při $F \rangle F_{\frac{\alpha}{2}}$.

<u>1. Příklad:</u>
Posuďte významnost rozdílu mezi dvěma výběrovými rozptyly a to: v prvém výběru byla určena výběrová střední chyba $m_1 = 31$ z $n_1 = 16$ měření a ve druhém výběru výběrová střední chyba $m_2 = 21$ z $n_2 = 11$ měření. Hodnocení proveďte na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

<u>Řešení:</u>
Jedná se o oboustranný test hypotézy.

<u>Formulace nulové hypotézy</u>: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
<u>Formulace alternativní hypotézy</u>: $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

<u>Testovacím kriteriem bude</u>:

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{961}{441} = 2{,}18$$

<u>Z tabulek F-rozdělení</u> najdeme pro $\alpha = 0{,}05$ hodnotu $F_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{0{,}025} = 3{,}52 \quad (n_1' = 15,\, n_2' = 10)$$

<u>Vyslovíme závěr k nulové hypotéze</u>:
Protože $F \langle F_{\frac{\alpha}{2}}$ tedy $2{,}18 \langle 3{,}52$ nulovou hypotézu nezamítáme, tedy nezamítáme předpoklad rovnosti rozptylů obou základních souborů.

1.4 Ověření hypotézy o rovnosti středních hodnot dvou normálně rozdělených základních souborů

Testujeme hypotézu, že dva výběry s výběrovými průměry x_1 a x_2 s výběrovými středními chybami m_1 a m_2 jsou výběry ze dvou základních souborů, pro které platí rovnost jejich středních hodnot $E(x)_1 = E(x)_2$. Test se většinou používá jako oboustranný. Testovací kriterium volíme podle toho, zda rozptyly základních souborů jsou, či nejsou stejné. Musíme tedy nejprve provést test rozdílu mezi dvěma rozptyly podle předchozího testu, kterým rozhodneme, zda:

a) oba rozptyly se významně neliší
b) oba rozptyly se významně liší

V případě, že se:

a) <u>oba rozptyly významně neliší</u>, použijeme testovací kriterium:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot m_1^2 + (n_2 - 1)\cdot m_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 + n_2 - 2} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

kde: $m_1 = \sqrt{\frac{[vv]_1}{n_1 - 1}} \qquad m_2 = \sqrt{\frac{[vv]_2}{n_2 - 1}}$

veličina t má *t-studentovo* rozdělení s $(n_1 + n_2 - 2)$ stupni volnosti. Z tabulek *t-studentova* rozdělení najdeme pro zvolenou hladinu významnosti hodnotu $t_{\frac{\alpha}{2}}$. Nulovou hypotézu budeme zamítat při $t \rangle t_{\frac{\alpha}{2}}$

b) <u>oba rozptyly významně liší</u>, použijeme testovací kriterium:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}}} \quad \text{kde } m_1 = \sqrt{\frac{[vv]_1}{n_1 - 1}} \qquad m_2 = \sqrt{\frac{[vv]_2}{n_2 - 1}}$$

Vypočtenou hodnotu t porovnáme s hodnotou $\dddot{t}_{\frac{\alpha}{2}}$, kterou určíme:

$$\dddot{t}_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{t_{n_1', \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m_1^2}{n_1} + t_{n_2', \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m_2^2}{n_2}}{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}}$$

Hodnoty $t_{n_1', \frac{\alpha}{2}}$ a $t_{n_2', \frac{\alpha}{2}}$ jsou kritické hodnoty odečtené z tabulek *t-studentova* rozdělení pro hladinu významnosti α a stupně volnosti $n_1' = n_1 - 1$ a $n_2' = n_2 - 1$.
Nulovou hypotézu zamítáme při $t \rangle \dddot{t}_{\frac{\alpha}{2}}$.

1. Příklad:

Posuďte významnost rozdílu mezi dvěma výběrovými průměry na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. První výběr o rozsahu $n_1 = 16$ má průměr $x_1 = 225$ a výběrovou střední chybu $m_1 = 31$, druhý výběr o rozsahu $n_2 = 11$ má průměr $x_2 = 190$ a výběrovou střední chybu $m_2 = 21$.

Řešení:

Nejprve zhodnotíme oba rozptyly:

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

Formulace alternativní hypotézy: $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Testovacím kriteriem bude:

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{961}{441} = 2{,}18$$

Z tabulek F-rozdělení najdeme pro $\alpha = 0{,}05$ hodnotu $F_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{0{,}025} = 3{,}52 \quad (n_1' = 15,\ n_2' = 10)$$

Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:

Protože $F \langle F_{\frac{\alpha}{2}}$ tedy $2{,}18 \langle 3{,}52$ nulovou hypotézu nezamítáme, tedy nezamítáme předpoklad rovnosti rozptylů obou základních souborů, **oba rozptyly se tedy významně neliší**.

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : E(x)_1 = E(x)_2$

Formulace alternativní hypotézy: $H_1 : E(x)_1 \neq E(x)_2$

Testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot m_1^2 + (n_2 - 1)\cdot m_2^2}} \cdot \sqrt{n_1 + n_2 - 2} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{|225 - 190|}{\sqrt{15 \cdot 31^2 + 10 \cdot 21^2}} \cdot \sqrt{16 + 11 - 2} \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot 11}{16 + 11}} = 3{,}25$$

Z tabulek t-studentova rozdělení najdeme pro $\alpha = 0{,}05$ a $(n_1 + n_2 - 2)$ stupňů volnosti hodnotu:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0{,}025} = 2{,}06$$

Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:

Z porovnání vychází $t \rangle t_{\frac{\alpha}{2}}$ číselně $3{,}25 \rangle 2{,}06$, proto zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že hodnocené výběry nejsou ze základních souborů se stejnou střední hodnotou.

2. Příklad:

Posuďte významnost rozdílu mezi dvěma výběrovými průměry na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$. První výběr o rozsahu $n_1 = 16$ má průměr $x_1 = 215$ a výběrovou střední chybu $m_1 = 41$, druhý výběr o rozsahu $n_2 = 11$ má průměr $x_2 = 190$ a výběrovou střední chybu $m_2 = 21$.

Řešení:

Nejprve zhodnotíme oba rozptyly:

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

Formulace alternativní hypotézy: $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Testovacím kriteriem bude:

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{1681}{441} = 3{,}81$$

Z tabulek F-rozdělení najdeme pro $\alpha = 0{,}05$ hodnotu $F_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$F_{\frac{\alpha}{2}} = F_{0{,}025} = 3{,}52 \quad (n_1' = 15,\ n_2' = 10)$$

Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:

Protože $F \rangle F_{\frac{\alpha}{2}}$ tedy $3{,}81 \rangle 3{,}52$ nulovou hypotézu zamítáme, tedy zamítáme předpoklad rovnosti rozptylů obou základních souborů, **oba rozptyly se tedy významně liší**.

Formulace nulové hypotézy: $H_0 : E(x)_1 = E(x)_2$

Formulace alternativní hypotézy: $H_1 : E(x)_1 \neq E(x)_2$

Testovacím kriteriem bude:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}}} = \frac{|215 - 190|}{\sqrt{\frac{1681}{16} + \frac{441}{11}}} = 2{,}07$$

Z tabulek t-studentova rozdělení najdeme kritické hodnoty:

$t_{0{,}025}(n_1' = 15) = 2{,}13$

$t_{0{,}025}(n_2' = 10) = 2{,}23$

kritické hodnoty dosadíme do vzorce pro výpočet $\ddot{t}_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$\ddot{t}_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{t_{n_1', \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m_1^2}{n_1} + t_{n_2', \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m_2^2}{n_2}}{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}} = \frac{2{,}13 \cdot \frac{1681}{16} + 2{,}23 \cdot \frac{441}{11}}{\frac{1681}{16} + \frac{441}{11}} = 2{,}16$$

Vyslovíme závěr k nulové hypotéze:

Z porovnání vychází $t \langle t_{\frac{\alpha}{2}}$ číselně $2{,}07 \langle 2{,}16$, proto nezamítáme nulovou hypotézu, tedy nezamítáme předpoklad, že hodnocené výběry jsou ze základních souborů se stejnou střední hodnotou.

1.5 *Ověřování hypotézy o odlehlosti krajních měření ve výběru z normálního rozdělení*

Testujeme hypotézu, že všechna měření patří do výběru z normálního rozdělení. Používají se dva typy testů:

<u>1. typ testu:</u>

V daném výběrovém souboru vypočítáme výběrový průměr x a střední opravu:

$$m_v = \sqrt{\frac{[vv]}{n}} \quad \text{, kde} \quad v_i = x - l_i$$

l_i …naměřené hodnoty

Vyhledáme opravu s maximální absolutní velikostí.

Testovacím kriteriem bude veličina:

$$K_1 = \frac{|v_{\max}|}{m_v}$$

Veličina K_1 má rozdělení, pro které jsou kritické hodnoty $K_{1,\alpha}$ a hladiny významnosti uvedeny v tabulce:

Tabulka kritických hodnot $K_{1,\alpha}$

α \ n	3	4	5	8	10	15	20	25
0,01	1,41	1,72	1,95	2,37	2,54	2,80	2,96	3,07
0,05	1,41	1,69	1,87	2,17	2,29	2,49	2,62	2,72
0,10	1,41	1,64	1,79	2,04	2,15	2,33	2,45	2,54

Odlehlým měřením bude to měření, pro které bude platit:

$$K_1 \rangle K_{1,\alpha}$$

Toto měření vyloučíme ze souboru měření a vypočítáme nový průměr, střední opravu a postup budeme případně opakovat pro další odlehlá měření.

<u>2. typ testu:</u>

Výběrové hodnoty seřadíme podle velikosti $l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_n$, vypočítáme testovací kriterium z maximální hodnoty rozdílu dvou sousedních hodnot na krajích seřazeného výběru:

$$K_2 = \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n - l_1} \quad \text{nebo} \quad K_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_n - l_1}$$

Veličina K_2 má rozdělení, pro které jsou kritické hodnoty $K_{2,\alpha}$ a hladiny významnosti uvedeny v tabulce:

Tabulka kritických hodnot $K_{2,\alpha}$

α \ n	3	4	5	8	10	15	20	25	30
0,01	0,99	0,89	0,78	0,59	0,53	0,44	0,39	0,36	0,34
0,05	0,94	0,76	0,64	0,47	0,41	0,34	0,30	0,28	0,26
0,10	0,89	0,68	0,56	0,40	0,35	0,28	0,25	0,23	0,22

Pokud pro měření l_n, l_1 (poslední nebo první) bude platit $K_2 \rangle K_{2,\alpha}$, takové měření vyloučíme a postup budeme opakovat pro případná další odlehlá měření.

1. Příklad:

Byl proveden soubor $n = 12$ měření: 83, 88, 84, 78, 82, 82, 86, 81, 98, 83, 85, 80. Hodnota 98 vzbuzuje podezření, že jde o chybu hrubou. Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0{,}01$, zda hodnota 98 patří do daného výběru.

Řešení:

1. typ testu:

Vypočítáme výběrový průměr x a střední opravu:

$$x = \frac{[l]}{n} = 84{,}2$$

$$m_v = \sqrt{\frac{[vv]}{n}} = 4{,}90$$

Vyhledáme opravu s maximální absolutní velikostí: $l_9 = 98$

Testovacím kriteriem bude veličina:

$$K_1 = \frac{|v_{\max}|}{m_v} = \frac{|x - l_9|}{m_v} = \frac{|84{,}2 - 98|}{4{,}90} = 2{,}82$$

Z tabulky odečteme kritické hodnoty $K_{1,\alpha}$ pro $n = 12$ a $\alpha = 0{,}01$:

$$K_{1,\alpha} = 2{,}66$$

Protože $K_1 \rangle K_{1,\alpha}$ vylučujeme hodnotu $l_9 = 98$ ze souboru měření a vypočítáme nový průměr a střední opravu a soubor znovu otestujeme.

2. typ testu:

Seřadíme podle velikosti:

78, 80, 81, 82, 82, 83, 83, 84, 85, 86, 88, 98

Vypočítáme testovací kriterium:

$$K_2 = \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n - l_1} = \frac{98 - 88}{98 - 78} = 0{,}5$$

Z tabulky odečteme kritické hodnoty $K_{2,\alpha}$ pro $n = 12$ a $\alpha = 0{,}01$:

$$K_{2,\alpha} = 0{,}48$$

Protože $K_2 \rangle K_{2,\alpha}$ vylučujeme hodnotu $l_9 = 98$ ze souboru měření.

1.6 *Ověřování hypotézy o skupinové systematické chybě*

Tento postup testování se používá v případě podezření, že měření obsahuje systematické chyby závislé na jistém faktoru. Podle tohoto faktoru rozdělíme náhodný výběr o celkovém rozsahu *N* na $k > 2$ skupin tak, aby předpokládaný charakter systematické chyby byl přibližně konstantní uvnitř skupin a proměnlivý ve skupinách navzájem. Podkladem bude střední chyba, vypočtená z oprav měření k dílčím průměrům ve skupinách proti střední chybě, vypočtené z oprav dílčích průměrů k celkovému průměru.

Vypočteme:

- skupinové průměry x_j (počet prvků ve skupině n_j); $j = 1, 2, \ldots, k$
- opravy k dílčím průměrům $v_{ij} = x_j - l_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,n_j$
- celkový průměr *X* (celkový počet prvků $N = \sum n_j$)
- opravy dílčích průměrů k celkovému průměru $V_j = X - x_j$

Testovat budeme hypotézu o nepřítomnosti systematické chyby – tedy o náhodnosti rozdílu mezi oběma středními chybami. Test se požívá jako pravostranný. Testovacím kritériem bude veličina:

$$\boxed{F = \frac{m_I^2}{m_{II}^2}}$$, kde $$\boxed{m_I^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} n_j V_j^2}$$ *střední chyba vypočtená z oprav k dílčím průměrům ve skupinách*

$$\boxed{m_{II}^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} v_{ij}^2}$$ *střední chyba vypočtená z oprav dílčích průměrů k celkovému průměru*

Tato veličina má *F-rozdělení* s $n_I' = k - 1$ a $n_{II}' = N - k$ stupni volnosti.

V tabulkách *F-rozdělení* najdeme pro hladinu významnosti α a počet stupňů volnosti n_I' a n_{II}' kritickou hodnotu F_α. Testovanou hypotézu zamítáme při $F \rangle F_\alpha$ a můžeme vyslovit závěr o přítomnosti skupinové systematické chyby závislé na faktoru, podle kterého byly vytvořeny skupiny.

Příklad: **ověřování hypotézy o skupinové systematické chybě**

Úhel byl na stanovisku zaměřen ve třech různých denních dobách (ráno, odpoledne a v noci) v celkovém počtu *N = 21* měření. Analýzou výsledků rozhodněte na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$, zda na měření nepůsobila refrakční systematická chyba. Výsledky měření:

ráno: 20, 24, 28, 24, 26, 21, 20, 29; $n_1 = 8$;
odpoledne: 32, 33, 37, 31, 38, 35, 39; $n_2 = 7$;
v noci: 38, 32, 39, 30, 32, 33; $n_3 = 6$.

Řešení:
Skupiny měření ponecháme tak, jak byly měřeny, pro působení případné refrakční chyby je rozhodující denní doba měření. Testujeme hypotézu o náhodném rozdílu mezi středními chybami m_I a m_{II} , tj. o nepůsobení refrakční chyby.

	skupinové průměry x_j		opravy k dílčím průměrům v_{ij}								$[vv]$
ráno	x_1=	24	+4	0	-4	0	-2	+3	+4	-5	86
odpoledne	x_2=	35	+3	+2	-2	+4	-3	0	-4		58
v noci	x_3=	34	-4	+2	-5	+4	+2	+1			66

Celkový průměr: $X = \frac{[l]}{N} = \frac{641}{21} = 30{,}5$

Střední chyby:

$$m_I^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} n_j V_j^2 = \frac{1}{3-1}\cdot\left\{ \left[8\cdot(\underbrace{30{,}5-24}_{V_j = X - x_j})^2\right] + \left[7\cdot(30{,}5-35)^2\right] + \left[6\cdot(30{,}5-34)^2\right] \right\} = \frac{553}{2} = 277$$

$$m_{II}^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} v_{ij}^2 = \frac{1}{21-3}\cdot(86+58+66) = \frac{210}{18} = 11{,}7$$

Testovací kritérium: $F = \frac{m_I^2}{m_{II}^2} = \frac{277}{11{,}7} = 23{,}7$

Z tabulek *F-rozdělení* najdeme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a $n_I' = 2$, $n_{II}' = 18$ kritickou hodnotu $F_\alpha = 3{,}6$. Protože $F \rangle F_\alpha$, zamítneme nulovou hypotézu a soudíme na přítomnost systematické refrakční chyby závislé na denní době.