Vyrovnání měření přímých stejné přesnosti

1) Určíme přibližnou hodnotu x_0 pro přehlednější výpočet v pracovní tabulce:

   $x_0 = \ldots$

2) Vypočteme hodnoty doplňků δ_i k přibližné hodnotě x_0:

   $\delta_i = l_i - x_0$, protože $l_i = x_0 + \delta_i$

3) Výpočet aritmetického průměru:

   $x = x_0 + \dfrac{[\delta]}{n} = \ldots$, případně $\varepsilon_z = \ldots$

4) Výpočet oprav $v(mm)$, vv a $v\delta$ v tabulce, kontroly [v] = 0.

   $v_1 = x - x_0 - \delta_1 = \ldots$

   V případě, že bude $[v] \neq 0$, pak byl aritmetický průměr určen chybně, nebo byl změněn zaokrouhlením z přesné hodnoty x na hodnotu $x \pm \varepsilon_z$, kde ε_z je chyba ze zaokrouhlení. Hodnota součtu [v] se pak bude rovnat toleranci $[v] = \pm n \cdot \varepsilon_z$.

5) V pracovní tabulce vypočteme $[vv]$ a $-[v\delta]$. Provedeme kontrolu $[vv] = -[v\delta]$.
   Jestliže $[v] \neq 0$, pak i $[vv] \neq -[v\delta]$. Kontrolně určíme rozdíl jejich absolutních hodnot $\left| \, [vv] \, \right| - \left| \, [v\delta] \, \right|$, který má být roven toleranci $\pm [\delta] \cdot \varepsilon_z$.

6) Empirická střední chyba jednoho měření ze souboru *n* měření:

   $$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \ldots$$

7) Empirická střední chyba aritmetického (výběrového) průměru:

   $$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \ldots$$

8) Výsledek vyrovnání zapíšeme ve tvaru:

   $x \pm m_x \qquad (n' = \ldots)$

Příklad

Délka byla měřena 5 krát za stejných podmínek. Proveďte vyrovnání metodou nejmenších čtverců a určete charakteristiky přesnosti.

Vypracování:

i	$l(m)$	$\delta(mm)$	$v(mm)$	vv	$v\delta$
1	2	3	4	5	6
1	226,252	2	+3	9	+6
2	226,255	5	0	0	0
3	226,258	8	-3	9	-24
4	226,257	7	-2	4	-14
5	226,253	3	+2	4	+6
		$[\delta]=25$	$[v]=0$	$[vv]=26$	$[v\delta]=-26$

platí $[vv]=-[v\delta]$

$[v]=0$

1) Určení přibližné hodnoty x_0 tak, aby doplňky δ_i byly kladné:

$$x_0 = 226{,}250m$$

2) Výpočet doplňků $\delta(mm)$ v tabulce ↑
3) Výpočet aritmetického průměru:

$$x = x_0 + \frac{[\delta]}{n} = 226{,}250 + \frac{0{,}025}{5} = 226{,}255m$$

4) Výpočet oprav $v(mm)$, vv a $v\delta$ v tabulce ↑, kontroly $[v] = 0$

$$v_1 = x - x_0 - \delta_1 = 226{,}255 - 226{,}250 - 0{,}002 = 0{,}003m$$

$$v_2 = \ldots$$

5) V pracovní tabulce vypočteme $[vv]$ a $-[v\delta]$. Provedeme kontrolu $[vv]=-[v\delta]$
6) Empirická střední chyba měření vypočtená z oprav:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{26}{4}} = \pm 2{,}55mm$$

7) Empirická střední chyba aritmetického (výběrového) průměru:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}55}{\sqrt{5}} = \pm 1{,}14mm$$

8) Výsledek vyrovnání: $x \pm m_x$ $(n' = \ldots)$

$$\boxed{226{,}255 \ \pm 0{,}00114 \text{ m} \qquad (n' = 4)}$$

Vyrovnání měření přímých nestejné přesnosti

9) Rozhodneme o volbě vah (např.: $p_i = \dfrac{k}{m_i^2}$)

10) Určíme přibližnou hodnotu x_0 pro přehlednější výpočet v pracovní tabulce:

$$x_0 = \dots$$

11) Vypočteme hodnoty doplňků δ_i k přibližné hodnotě x_0:

$$\delta_i = l_i - x_0 \quad \text{, protože } l_i = x_0 + \delta_i$$

12) Vypočteme vyrovnanou (nejpravděpodobnější) hodnotu x :

$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = \dots \quad \text{, případně } \varepsilon_z = \dots$$

13) V pracovní tabulce vypočteme opravy:

$v_i = x - x_0 - \delta_i = \dots$ a součiny $p_i v_i = \dots$ a provedeme kontrolu $[pv] = 0$.

Jestliže dostaneme $[pv] \neq 0$, pak byl obecný průměr určen chybně, nebo byl změněn zaokrouhlením z přesné hodnoty x na hodnotu $x \pm \varepsilon_z$, kde ε_z je chyba ze zaokrouhlení a součet $[pv]$ pak bude v toleranci $[pv] = \pm [p] \cdot \varepsilon_z$.

14) V pracovní tabulce vypočteme $[pvv]$ a $[pv\delta]$. Provedeme kontrolu $[pvv] = -[pv\delta]$.

Jestliže $[pv] \neq 0$, pak i $[pvv] \neq -[pv\delta]$. Kontrolně určíme rozdíl jejich absolutních hodnot $|[pvv]| - |[pv\delta]|$, který má být v toleranci $\pm [p\delta] \cdot \varepsilon_z$.

15) Vypočteme empirickou střední chybu jednotkovou z oprav :

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \dots$$

16) Vypočteme empirickou střední chybu aritmetického průměru z oprav :

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p] \cdot (n-1)}} = \dots$$

17) Výsledek vyrovnání zapíšeme ve tvaru:

$$x \pm m_x \qquad (n' = \dots)$$

Příklad

Při zkoušce nového teodolitu byl tentýž úhel měřen ve čtyřech různých dnech, vždy v jiném počtu skupin. Aritmetické průměry výsledků měření l_i a jejich střední chyby m_{l_i} jsou uvedeny v tabulce. Vypočtěte nejpravděpodobnější hodnotu měřeného úhlu, jednotkovou střední chybu a střední chybu aritmetického průměru.

i	l_i (^{g})	m_{l_i} (^{cc})
1	65,8232	±1,14
2	65,8236	±1,46
3	65,8233	±0,60
4	65,8231	±0,81

i	l_i	m_{l_i}	p_i	δ_i	$p_i\delta_i$	v_i	p_iv_i	$p_iv_iv_i$	$p_iv_i\delta_i$
	(^{g})	(^{cc})		(^{cc})	(^{cc})	(^{cc})	(^{cc})		
1	65,8232	1,14	0,77	2	1,54	0,60	0,46	0,28	0,92
2	65,8236	1,46	0,47	6	2,81	-3,40	-1,60	5,42	-9,57
3	65,8233	0,6	2,78	3	8,33	-0,40	-1,11	0,44	-3,33
4	65,8231	0,81	1,52	1	1,52	1,60	2,44	3,90	2,44
Σ			5,54		14,21		0,19	10,05	-9,54

1) Rozhodneme o volbě vah: $p_i = \dfrac{1}{m_i^2}$

2) Určíme přibližnou hodnotu $x_0 = 65{,}8230^g$

3) Vypočteme hodnoty doplňků: $\delta_i = l_i - x_0$

4) Vypočteme vyrovnanou (nejpravděpodobnější) hodnotu x:

$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 65{,}8230^g + \frac{14{,}21^{cc}}{5{,}54} = 65{,}82326^g \qquad , \ \varepsilon_z = -0{,}0000035^g$$

5) Vypočteme opravy: $v_i = x - x_0 - \delta_i = \ldots$ a součiny $p_i v_i = \ldots$

Protože $[pv] \neq 0$, bude $[pv] = \pm[p]\cdot\varepsilon_z$, tedy: $[pv] = 0{,}19^{cc}$

$$\pm[p]\cdot\varepsilon_z = \pm 5{,}54\cdot 0{,}035^{cc} = \pm 0{,}19^{cc}$$

6) Vypočteme $[pvv]$ a $[pv\delta]$. Provedeme kontrolu $[pvv] = -[pv\delta]$.

Protože $[pv] \neq 0$, pak i $[pvv] \neq -[pv\delta]$. Proto určíme: $\left|[pvv]\right| - \left|[pv\delta]\right| = \pm[p\delta]\cdot\varepsilon_z$, tedy:

$$\left|[pvv]\right| - \left|[pv\delta]\right| = 10{,}05 - 9{,}54 = 0{,}51$$

$$\pm[p\delta]\cdot\varepsilon_z = \pm 14{,}21\cdot 0{,}035 = 0{,}50$$

7) Vypočteme empirickou střední chybu jednotkovou z oprav :

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{10{,}05}{4-1}} = \pm 1{,}83^{cc}$$

8) Vypočteme empirickou střední chybu aritmetického průměru z oprav :

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{1{,}83}{\sqrt{5{,}54}} = \pm 0{,}78^{cc}$$

9) Výsledek vyrovnání zapíšeme ve tvaru:

$$65{,}82326^g \pm 0{,}78^{cc} \qquad (n' = 3)$$

Měřické dvojice nestejné přesnosti

Nivelační pořad skládající se z šesti oddílů byl zaměřen přesnou nivelací. Hodnoty měření tam a zpět a délky oddílů jsou uvedeny v tabulce. Proveďte vyrovnání a rozbory přesnosti tohoto nivelačního pořadu.

	tam	zpět	délka oddílu
n	l'	l''	s
	(m)	(m)	(km)
1	2,5003	-2,5002	0,31
2	-0,4358	0,4354	0,58
3	2,4519	-2,4523	0,69
4	-2,7926	2,7925	0,39
5	2,0644	-2,0640	0,65
6	1,7356	-1,7354	0,62

Vypracování:

	tam	zpět	délka oddílu	průměr	rozdíl	váha					
n	l'	l''	s	x	d	p=1/s	dd	d+1	$(d+1)^2$	pdd =	dd/s
	(m)	(m)	(km)	(m)	(mm)		(mm^2)				
1	2,5003	-2,5002	0,31	2,5003	0,1	3,23	0,01	1,10	1,21	0,03	0,03
2	-0,4358	0,4354	0,58	-0,4356	-0,4	1,72	0,16	0,60	0,36	0,28	0,28
3	2,4519	-2,4523	0,69	2,4521	-0,4	1,45	0,16	0,60	0,36	0,23	0,23
4	-2,7926	2,7925	0,39	-2,7926	-0,1	2,56	0,01	0,90	0,81	0,03	0,03
5	2,0644	-2,0640	0,65	2,0642	0,4	1,54	0,16	1,40	1,96	0,25	0,25
6	1,7356	-1,7354	0,62	1,7355	0,2	1,61	0,04	1,20	1,44	0,06	0,06
Σ	5,5238	-5,5240	3,24	5,5239	-0,2		0,54		6,14	0,88	0,88

- Kontrolní výpočet vyrovnaného výškového rozdílu:
$$\Delta h = \frac{[l'] + [l'']}{2} = \frac{5{,}5238 + 5{,}5240}{2} = 5{,}5239m$$

- Kontrolní výpočet: $[d] = [l'] - [l''] = 5{,}5238m - 5{,}5240m = -0{,}2mm$

- Kontrolní výpočet: $[dd] = \left[(d+1)^2\right] - 2 \cdot [d] - n = 6{,}14 - 2 \cdot (-0{,}2) - 6 = 0{,}54mm^2$

- Kontrola $[pdd] = \left[\frac{dd}{s}\right]$ souhlasí přesně.

- Výpočet empirické střední kilometrové chyby jednoho měření libovolné dvojice:
$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{dd}{s}\right]} = \pm\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 6} \cdot 0{,}88} = \pm 0{,}27mm$$

- Výpočet empirické střední kilometrové chyby aritmetického průměru libovolné dvojice:
$$m_{0_x} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{dd}{s}\right]} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6} \cdot 0{,}88} = \pm 0{,}19mm$$

- Výpočet empirické střední kilometrové chyby vyrovnaného výškového rozdílu celé tratě:
$$m_{\Delta h} = m_x \cdot \sqrt{s} = 0{,}19 \cdot \sqrt{3{,}24} = \pm 0{,}34mm$$

- Zápis výsledku vyrovnání:

$$\boxed{5{,}5239m \quad \pm 0{,}34mm}$$

Měřické dvojice stejné přesnosti

Příklad

Vzdálenost $S \doteq 600m$ byla rozdělena na šest úseků a každý byl měřen tam a zpět. Určete nejpravděpodobnější hodnotu celé vzdálenosti a její přesnost. Zadané hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

	tam	zpět
n	l'	l''
	(m)	(m)
1	100,68	100,71
2	99,32	99,30
3	100,29	100,28
4	100,07	100,11
5	99,98	99,98
6	101,52	101,53

<u>Vypracování:</u>

	tam	zpět	průměr	rozdíl			
n	l'	l''	x	d	dd	d+1	$(d+1)^2$
	(m)	(m)	(m)	(cm)	(cm^2)		
1	100,68	100,71	100,695	-3	9	-2	4
2	99,32	99,30	99,310	2	4	3	9
3	100,29	100,28	100,285	1	1	2	4
4	100,07	100,11	100,090	-4	16	-3	9
5	99,98	99,98	99,980	0	0	1	1
6	101,52	101,53	101,525	-1	1	0	0
suma	601,86	601,91	601,885	-5	31		27

- Kontrolní výpočet vyrovnané délky: $S = \dfrac{[l'] + [l'']}{2} = \dfrac{601{,}86 + 601{,}91}{2} = 601{,}885m$

- Kontrolní výpočet: $[d] = [l'] - [l''] = 601{,}86m - 601{,}91m = -5cm$

- Kontrolní výpočet: $[dd] = \left[(d+1)^2\right] - 2 \cdot [d] - n = 27 - 2 \cdot (-5) - 6 = 31cm^2$

- Výpočet <u>empirické střední chyby jednoho měření</u> libovolné dvojice:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm\sqrt{\frac{31}{2 \cdot 6}} = \pm 0{,}016m$$

- Výpočet <u>empirické střední chyby aritmetického průměru</u> libovolné dvojice:

$$m_x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{6}} = \pm 0{,}011m$$

- Výpočet empirické střední chyby vyrovnané hodnoty celé tratě:

$$m_s = m_x \cdot \sqrt{n} = 0{,}011 \cdot \sqrt{6} = \pm 0{,}027m$$

- Zápis výsledku vyrovnání:

$$\boxed{601{,}885m \ \ \pm 0{,}027m}$$