

Kartografie I

Matematické a geometrické základy kartografických děl

RNDr. Ladislav Plánka, CSc.

Institut geodézie a důlního měřictví, Hornicko-geologická fakulta, VŠB – TU Ostrava

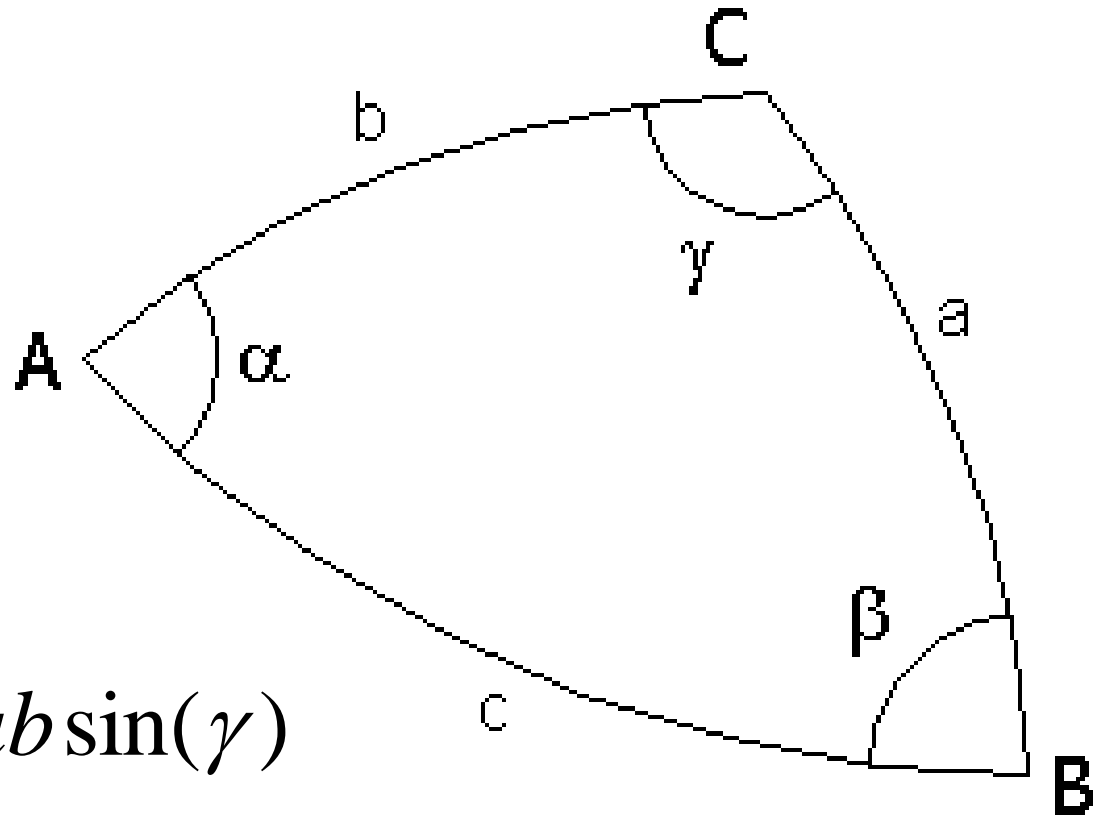
Podkladové materiály pro přednáškový cyklus předmětu „Kartografie I“ (jazyková ani odborná korektura neprovedena)

Úvod

- Země má nepravidelný tvar, proto není její povrch obvykle rozvinutelný do roviny bez deformací (kartografického zkreslení).
- Metodami převodu sférických ploch do roviny se v rámci kartografie zabývá **matematická kartografie**, která stanovuje i hodnoty zkreslení, ke kterému v každém bodě mapy dochází.

Základy sférické trigonometrie

Základy sférické trigonometrie



Exces:

$$\varepsilon \approx \frac{P}{R^2} = \frac{1}{2R^2} ab \sin(\gamma)$$

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$$

Základy sférické trigonometrie

- sinová věta $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$
- cosinová věta pro stranu a pro úhel
$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$
$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$$
- sinucosinová věta pro stranu a přilehlý úhel
$$\sin a \cdot \cos \beta = \sin c \cdot \cos b - \cos c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha$$
$$\sin a \cdot \cos \gamma = \sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

Neperovo pravidlo

- Neperovo pravidlo můžeme použít pouze v pravoúhlém sférickém trojúhelníku, kde je strana c naproti pravému úhlu.
- Kosinus kteréhokoliv prvku se rovná:
 - součinu kotangent prvků přilehlých, např.

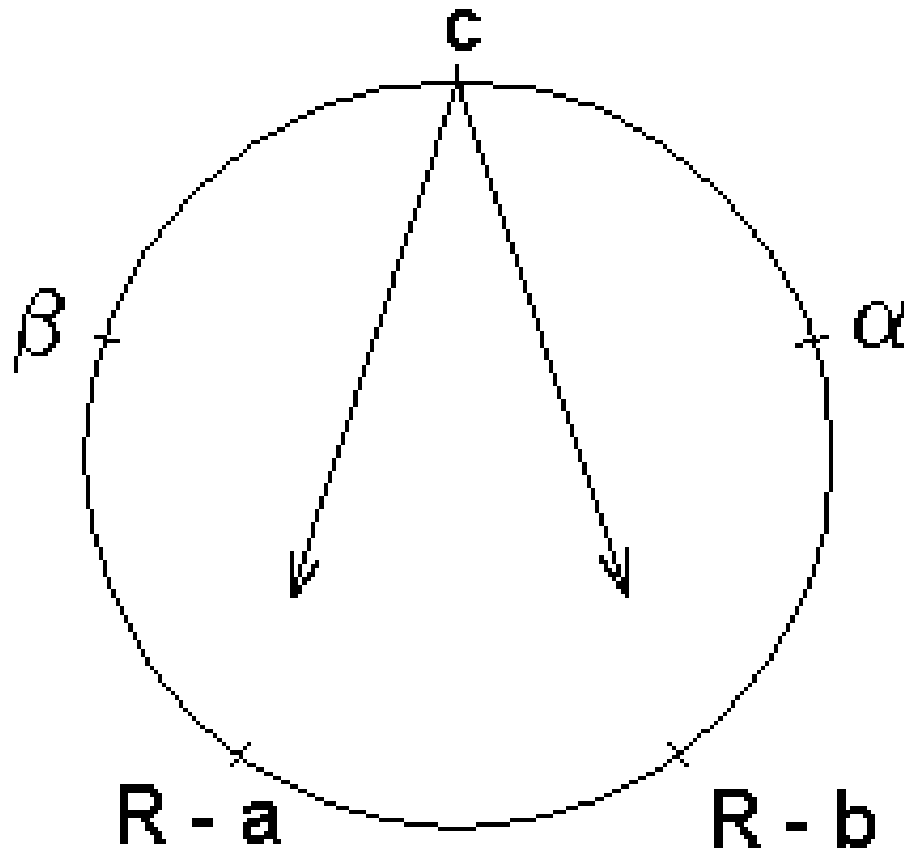
$$\cos c = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta$$

- součinu sinů prvků protilehlých

$$\cos c = \sin(R - \alpha) \cdot \sin(R - \beta)$$

$$\Rightarrow \cos c = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

Neperovo pravidlo



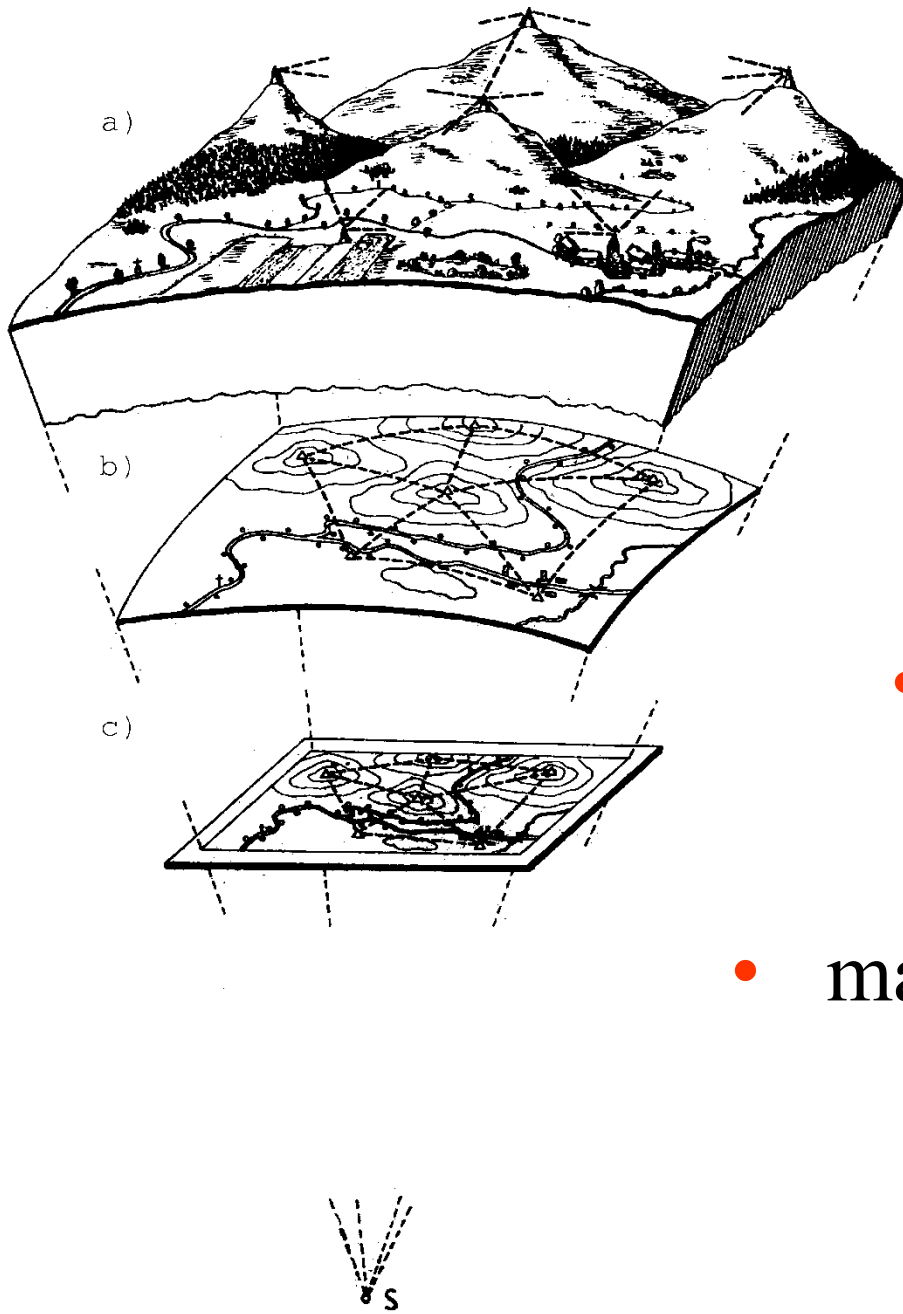
Referenční plochy

Vznik mapy

- reálný povrch

- referenční povrch

- mapa (kartografické dílo)



Referenční plochy:

- **rovina,**
- **topografická plocha** - spojitá, vyhlazuje mikrostrukturu a bezvýznamné tvary,
- **hladinová plocha** - souvislá plocha ortogonální k tížnicím (např. geoid),
- **jednoduché matematické plochy** (rovina, válcová plocha, kuželová plocha),
- **povrch referenčního tělesa** (koule, elipsoid).

Topografická plocha

- Povrch zemského tělesa je velice složitý a členitý a v modelech krajinné sféry je těžko zobrazitelný. Proto je pro vytváření těchto modelů nahrazován *topografickou plochou*, která je spojitou plochou vyhlazující mikrostrukturu a ty terénní tvary, které jsou z hlediska rozlišovací úrovně modelu bezvýznamné.
- Topografická plocha je však stále poměrně složitá pro přímé zobrazování do map nebo pro definování digitálních modelů.
- Pro účely mapování a tvorby modelů terénu se tato plocha nahrazuje *referenčními plochami*, které jsou jednodušší a jsou matematicky nebo fyzikálně přesně definované.

Jednoduché matematické plochy:

- kuželová plocha,
- válcová plocha,
- rovina, a to:
 - pro tvorbu plánu, tj. území okrouhlého tvaru do maximální plochy cca 200 km², tj. kruh o poloměru 8 km, resp. pro méně přesné práce cca 700 km², tj. kruh o poloměru 15 km (ortogonální promítání),
 - pro tvorbu kartografických děl větších územních celků (azimutální kartografická zobrazení).

Referenční tělesa

- **Geoid (určen především pro výšková měření)** - je definován jako plocha, na které mají všechny body stejný *geopotenciál*. Protože je geoid definován jako fyzikální těleso, je jeho matematické vyjádření značně složité (viz dále).
- **(Zemská) koule (poloměr 6 378 km) a/nebo referenční koule.**
- **(Zemský) elipsoid a/nebo referenční elipsoid.**

Referenční koule

Nejčastěji volíme poloměr koule jako tzv. střední poloměr křivosti (viz dále):

$$R_m = \sqrt{M \cdot N} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Pro ČR se střední geografickou šířkou $\varphi = 49^\circ 30'$ a za použití Besselova elipsoidu je:

$$R_m = 6\,380\,703,6105 \text{ m.}$$

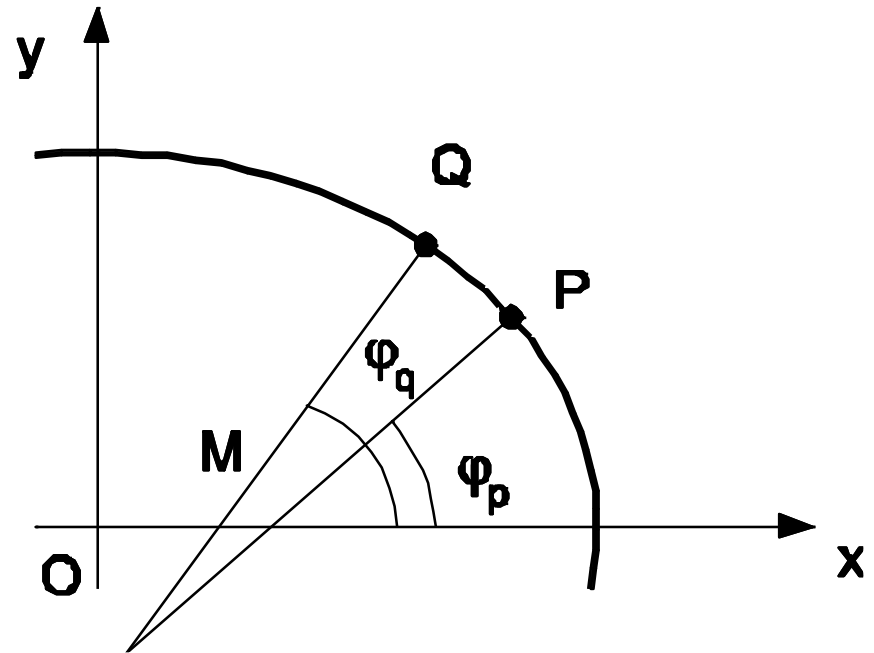
Při stejném objemu elipsoidu a koule je:

$$R_m = 6\,370,3 \text{ km.}$$

Meridiánový poloměr křivosti M

Závisí na zeměpisné šířce.

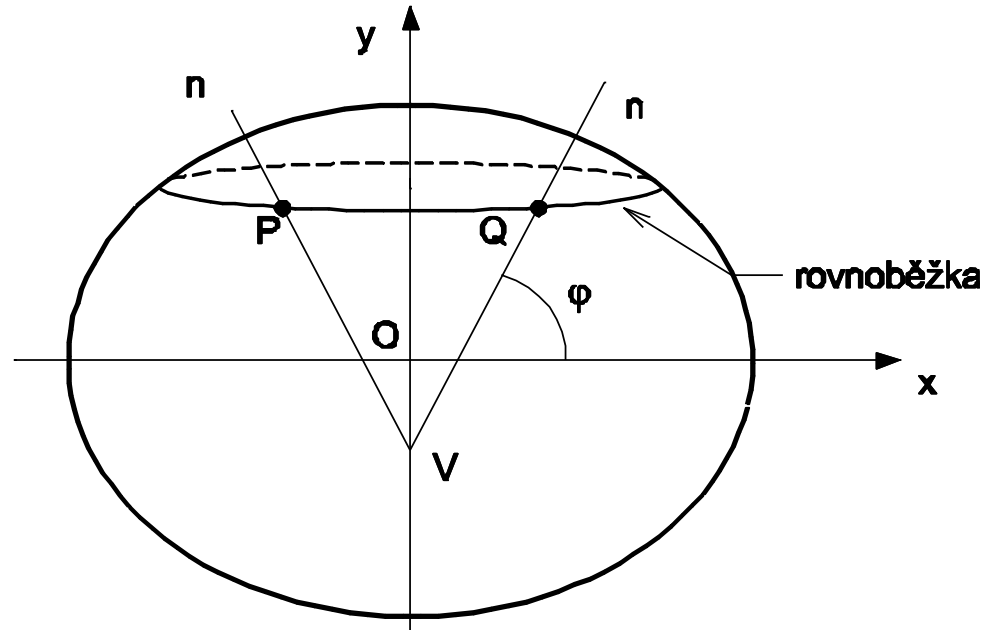
$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$



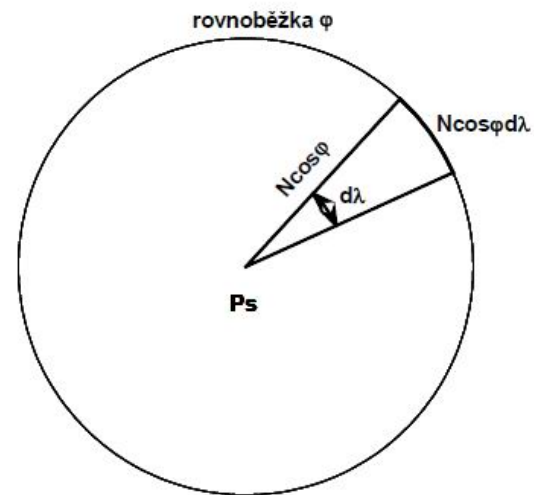
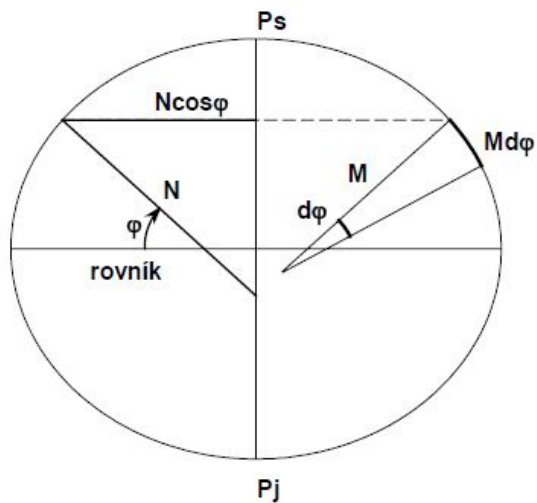
Příčný poloměr křivosti N

Pro všechny body na rovnoběžce je stejný.

$$N = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$



Elementy poledníkového a rovnoběžkového oblouku



Elementy poledníkového a rovnoběžkového oblouku

Pozn.: zeměpisná šířka na kouli (U), resp. na elipsoidu (φ) a zeměpisná délka na kouli (V), resp. na elipsoidu (λ) - viz dále.

- koule
$$ds_p = R dU$$
$$ds_r = R \cos U dV$$
- elipsoid
$$ds_p = M d\varphi$$
$$ds_r = N \cos \varphi d\lambda$$

Délka poledníkového/rovnoběžkového oblouku

Výpočet délky poledníkového oblouku:

$$s_p = \frac{R(U_s - U_j)}{\rho}$$

Výpočet délky rovnoběžkového oblouku:

Poloměr rovnoběžky:

$$r = R \cos U$$

Délka rovnoběžkového oblouku:

$$s_r = \frac{r(V_v - V_z)}{\varphi}$$

Rotační elipsoid

- Matematicky pravidelná plocha, odchyluje se pouze málo od geoidu.
- Normála k elipsoidu a tížnice ke geoidu nejsou totožné (vzniká tzv. tížnicová odchylka).

Rozlišujeme:

a) Zemský (rotační) elipsoid (aproximace geoidu)

Střed zemského elipsoidu je totožný s hmotným středem Země (geocentrem).

Malá poloosa zemského elipsoidu je totožná se středem rotace.

b) Referenční (rotační) elipsoid (aproximace části geoidu)

Střed referenčního elipsoidu nemusí být totožný se středem Země.

Na vybraném území aproximuje geoid referenční elipsoid lépe než zemský elipsoid.

Rotační elipsoid

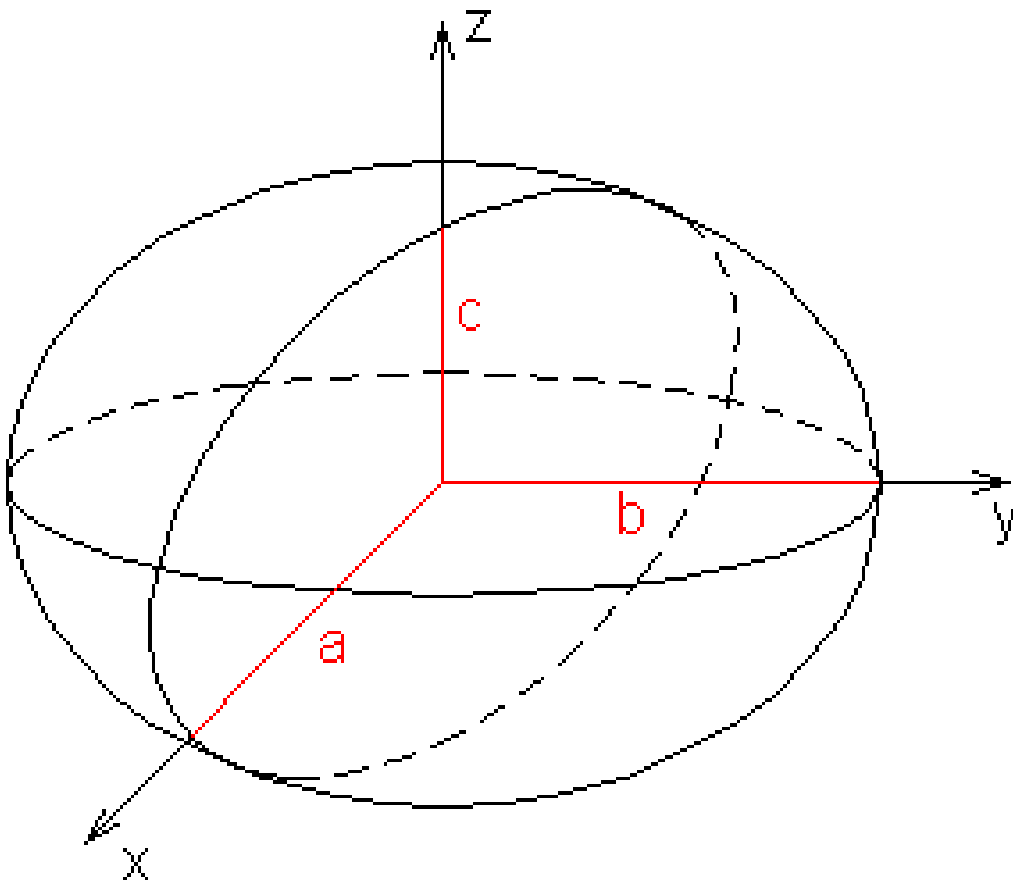
Konstanty rotačního elipsoidu (*vznikne rotací elipsy podle jedné z poloos, v případě Země podle vedlejší poloosy*):

- a hlavní (také „velká“) poloosa
- b vedlejší (také „malá“) poloosa
- e^2 numerická výstřednost (excentricita)
- e'^2 druhá excentricita
- i zploštění
- W první geodetická funkce
- V druhá geodetická funkce

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad i = \frac{a - b}{a}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

Trojosý elipsoid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Konstanty nejznámějších referenčních elipsoidů

Označení	a (m)	b (m)	i
Zachův	6 376 045	6 355 477,113	1:310
Clarke	6 378 249	6 356 515	1:293,5
Bessel	6 377 397,1550	6 356 078,9632	1:299,152812
Krasovský	6 378 245,000	6 356 863,0188	1:298,3
IAG	6 378 160,000	6 356 774,5161	1: 298,247
Hayford	6 378 388,000	6 356 911,946	1:297,00
WGS84	6 378 137	6 378 137	1:298,257

Referenční elipsoid x koule

Referenční elipsoid se zpravidla používá v případech, kdy **je požadováno minimální zkreslení rovinného obrazu.**

Volí se zejména u kartografických zobrazení, která jsou využívána při definici státních a mezinárodních geodetických souřadnicových systémů **a při tvorbě základních mapových děl velkých a středních měřítek.**

Referenční elipsoid x koule

Referenční koule se používá pro zobrazení s **nižšími nároky na velikost zkreslení**.

Při využití referenční koule jsou zobrazovací rovnice podstatně jednodušší než u referenčního elipsoidu.

Tento způsob se uplatňuje hlavně **při tvorbě map malých měřítek a při řešení jednoduchých navigačních úloh**.

Referenční elipsoid x koule

Zvláštním případem je tzv. **dvojitě zobrazení**, kdy je referenční elipsoid nejprve zobrazen na kouli, která je pak následně teprve zobrazena do roviny.

Povrch koule je tak první zobrazovací plochou, rovina je až druhou.

Náhrada referenčního elipsoidu koulí

Náhrada elipsoidu koulí na menším území:

- $R = a$
- $R = b$
- $R =$ střední poloměr křivosti

$$R = \sqrt{MN}$$

Náhrada elipsoidu koulí globálně:

- Koule má stejný objem jako elipsoid
- Koule má stejný povrch jako elipsoid

$$R = \sqrt[3]{a^2b}$$

$$R = \sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$$

Geoid...

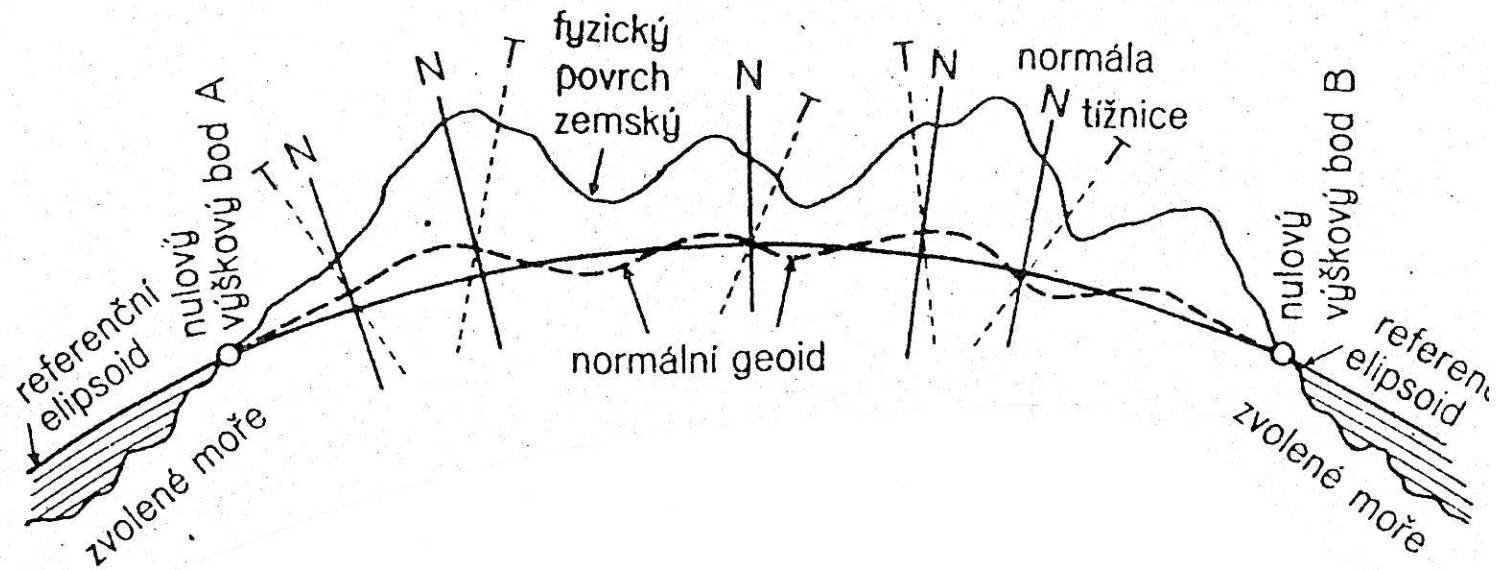
... je idealizované těleso omezené nulovou hladinovou plochou, která je ztotožněna se střední klidnou hladinou světového oceánu a odtud proložená i pod kontinenty, kde s určitým zjednodušením kopíruje velké terénní nerovnosti.

Vlastnosti:

- v každém bodě je jeho povrch kolmý na směr zemské tíže,
- má nepravidelný tvar (konvexní/konkávní) ovlivněný rozložením hmot v tělese Země,
- průběh tvaru geoidu se zjišťuje kombinací především geodetických, astronomických a gravimetrických měření.

Průběh geoidu je t.č. znám s přesností v řádech 0,1 – 1 m.

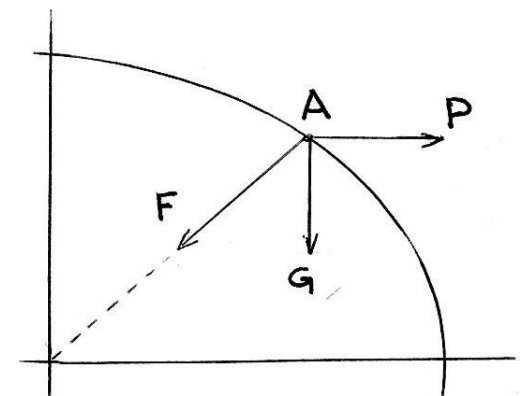
Geoid

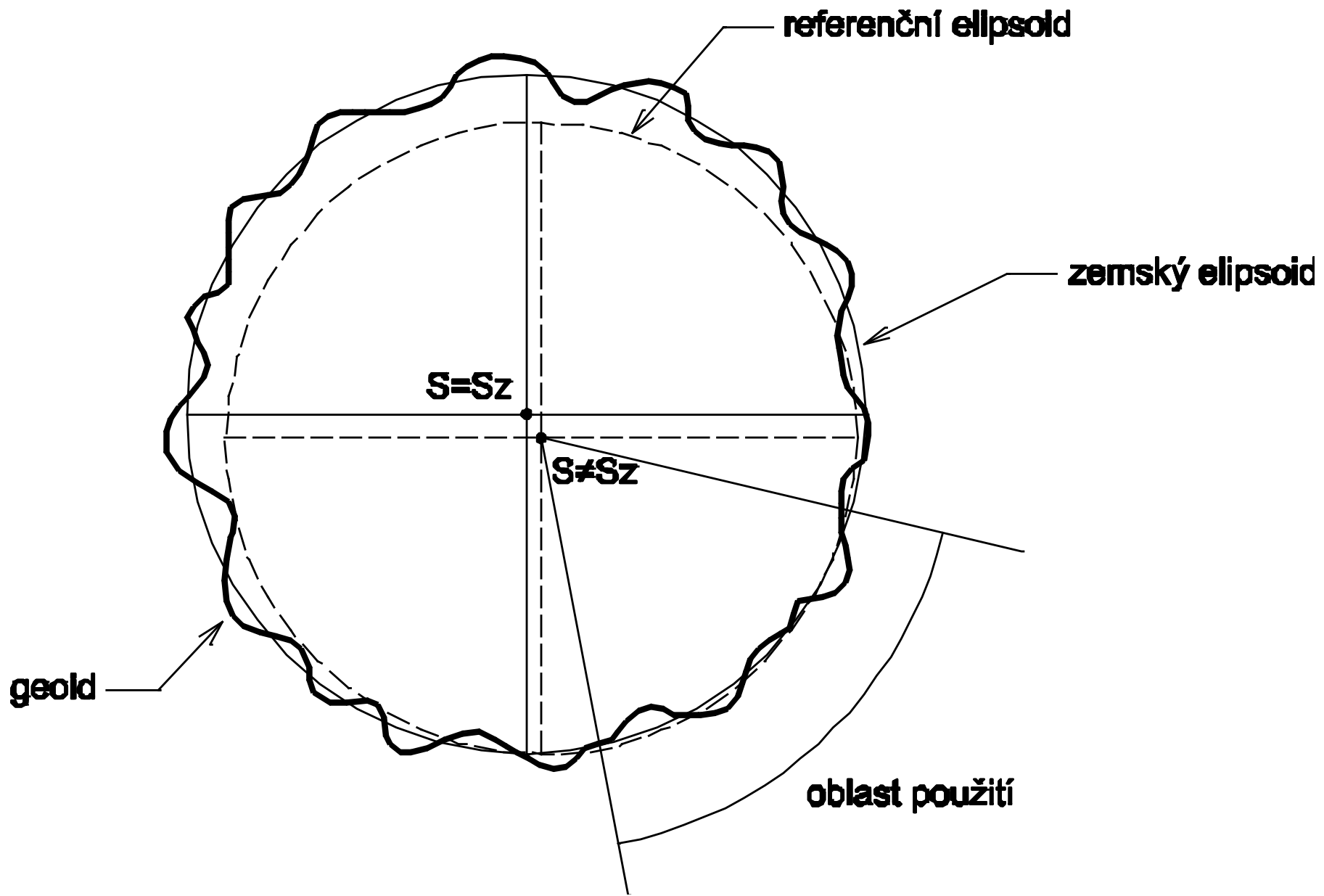


F – síla přitažlivá

P – síla odstředivá

G – zemská tíže (gravitace)





Souřadnicové soustavy na sférické ploše

- Sférické souřadnicové systémy
- Pravoúhlé souřadnicové systémy
- Polární souřadnicové systémy

Sférické souřadnicové soustavy

- Zeměpisné souřadnice - φ, λ (U, V)
- Geocentrické (redukované) souřadnice - β (ψ), λ
- Kartografické souřadnice - Š, D
- Izometrické souřadnice - ξ, η nebo q, λ
- aj.

Pozn.: ξ nebo $\xi =$ (x) ksí; $\eta =$ (é) éta, $\psi =$ psí

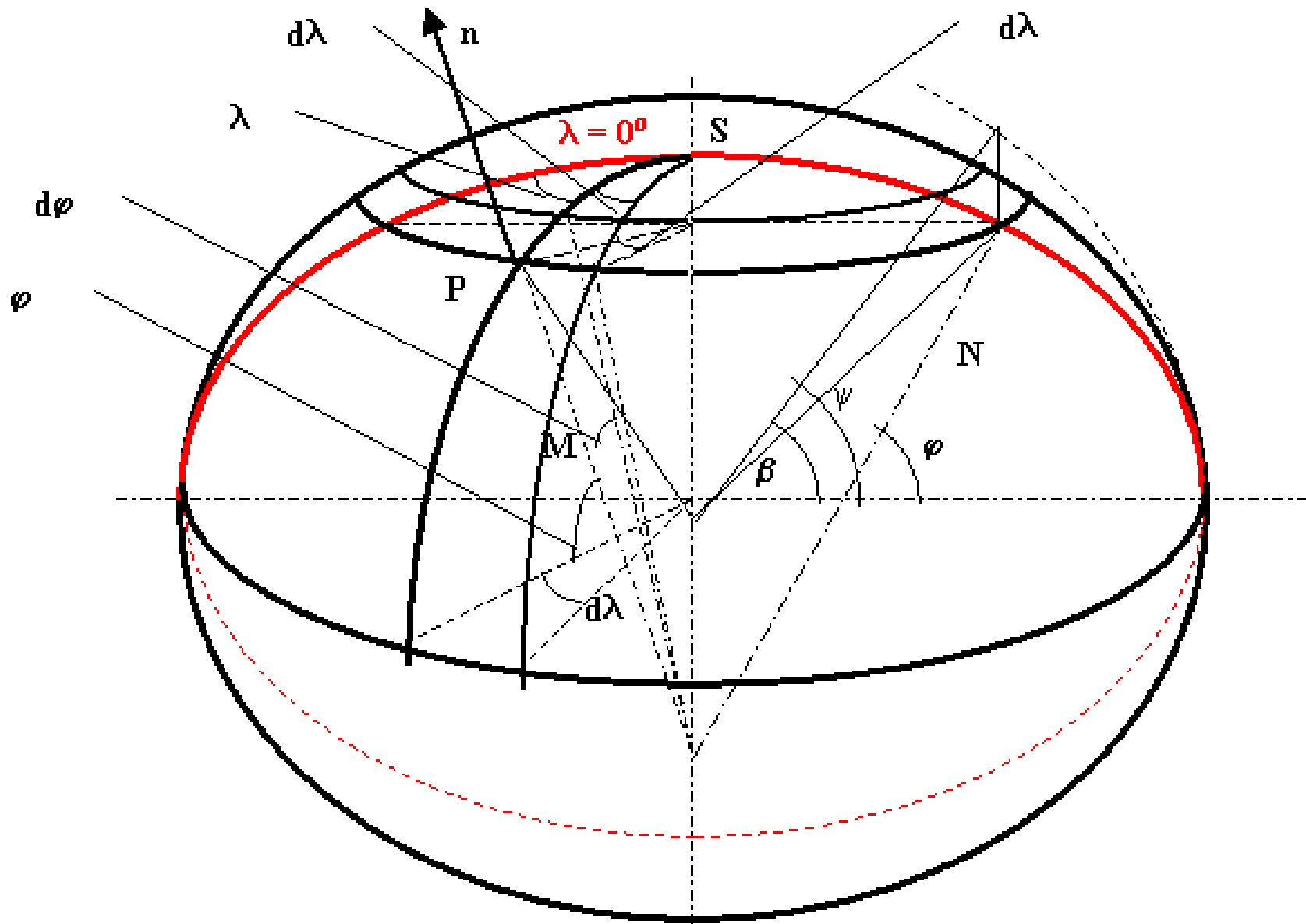
Zeměpisné (geografické, geodetické) souřadnice...

... představují určení polohy bodu na ploše elipsoidu (koule) pomocí zeměpisné (geografické, geodetické) šířky a zeměpisné (geografické, geodetické) délky.

- Zeměpisná šířka φ se definuje jako úhel mezi normálou k ploše elipsoidu (koule) a rovinou rovníku.
 - Na elipsoidu ji označujeme φ , na kouli U (na severní polokouli je kladná).
- Zeměpisná délka je úhlová vzdálenost libovolného bodu na zeměkouli od konvenčně zvoleného nultého poledníku.
 - Na elipsoidu ji značíme λ , na kouli V (na východní polokouli je kladná).

$$|\phi|, \text{ resp. } |U| \leq 90^\circ$$

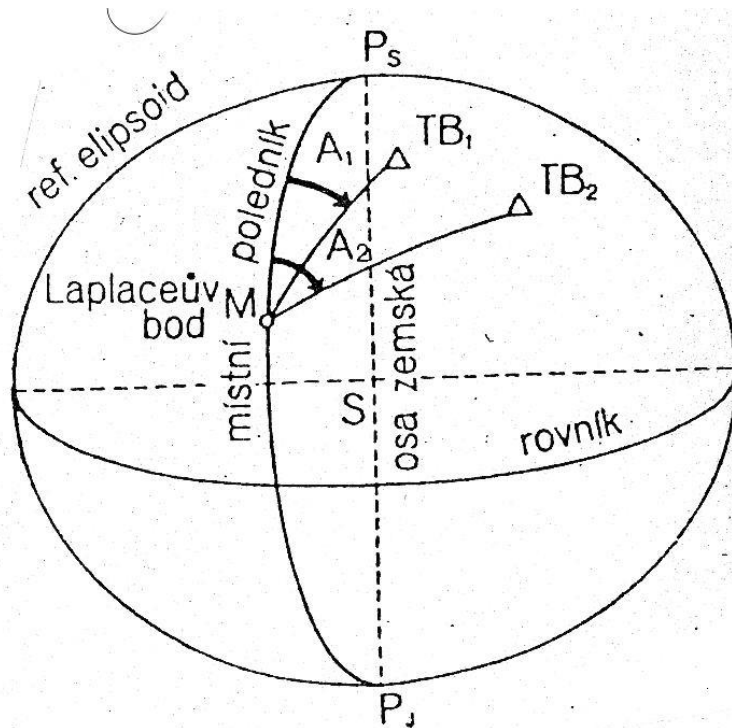
$$|\lambda|, \text{ resp. } |V| \leq 180^\circ$$



Zeměpisné a geocentrické souřadnice

Zeměpisné souřadnice

Azimut A je úhel, měřený od severního směru ve směru hodinových ručiček, který svírá místní poledník s danou stranou.

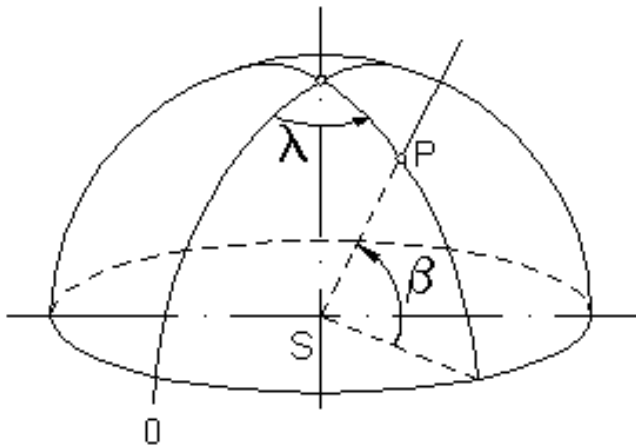


*Laplaceův bod je bod, na němž byla určena **geodetická zeměpisná šířka, délka a azimut a alespoň astronomická zeměpisná délka a azimut.***

Laplaceovy body představují základní opěrné body geodetických sítí.

Geocentrické souřadnice

- **Geocentrická šířka** (β) je úhel, který svírá spojnice bodu na referenčním elipsoidu se středem elipsoidu a rovinou rovníku.
- Geocentrická délka (λ) má stejnou definici jako zeměpisná délka.



$$\operatorname{tg}\beta = (1 - e^2) \operatorname{tg}\varphi$$

Geocentrických souřadnic se užívá především v astronomii a navigaci. Pro kulovou referenční plochu platí $U = \beta = \varphi$. Pro řešení některých teoretických úloh na ploše referenčního elipsoidu se užívá redukované geocentrické šířky. Pro kulovou referenční plochu platí $U = \varphi = \psi = \beta$.

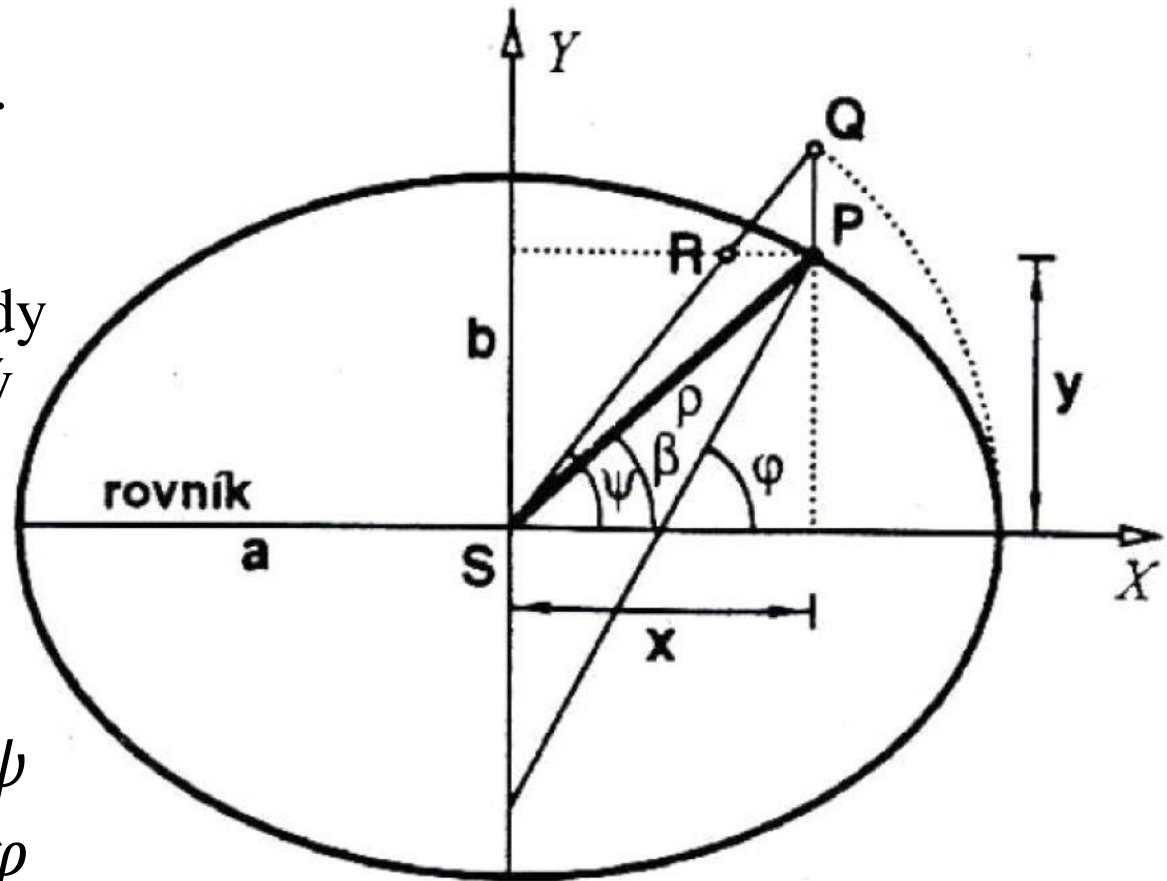
(Redukovaná) geocentrická šířka

- Bod Q je afinní bod k bodu P a leží na kouli.
- Úhel ψ je **(redukována) geocentrická šířka**, tedy úhel ($|\psi| \leq 90^\circ$), který svírá spojnice SQ s rovinou rovníku.

Platí:

$$\operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \cdot \operatorname{tg} \psi$$

$$\operatorname{tg} \psi = (1 - e^2) \cdot \operatorname{tg} \varphi$$



Souřadnicový systém na sférické ploše tvoří:

- poledníky – průsečíky rovin procházejících osou rotace s povrchem sférického tělesa,
- rovnoběžky – průsečíky rovin rovnoběžných s rovníkem s povrchem sférického tělesa.

Jakýmkoliv místem na ploše sférického tělesa prochází místní poledník a místní rovnoběžka.

V každém souřadnicovém systému na sférické ploše definujeme základní (nultý) poledník a základní (nultou) rovnoběžku.

Základní poledník

Mercator vedl počáteční poledník ostrovem Corvo ze skupiny Azorů, protože se tam úchylka magnetické střelky rovnala nule.

Na mys Orchilla na ostrově Ferro, se klade nultý poledník v letech 1634 – 1884 (viz dále).

Do té doby, pomíneme-li např. alexandrijský poledník aj. historické pokusy, se používal jako nultý poledník azorský, neboli kapverdský (holandští a angličtí kartografové), pařížský, norimberský, boloňský, berlínský, vídeňský, budapešťský, petrohradský, bratislavský (prešpurský) aj.

Základní poledník

- Od roku 1833 platí pro Evropu a od roku 1884 pro celý svět jako nultý **greenwichský poledník**. Byl definován pomocí astronomických měření.

V současné době je jeho označení již jen historickou setrvačností, neboť základní poledník je vlivem kolísání pólu s časem proměnný.

- V současnosti je permanentně zaměřován a vypočítáván Mezinárodní časovou službou v Paříži a přesně neodpovídá původnímu poledníku (neprochází oním základním bodem v Greenwichi).

Základní poledník



Greenwich



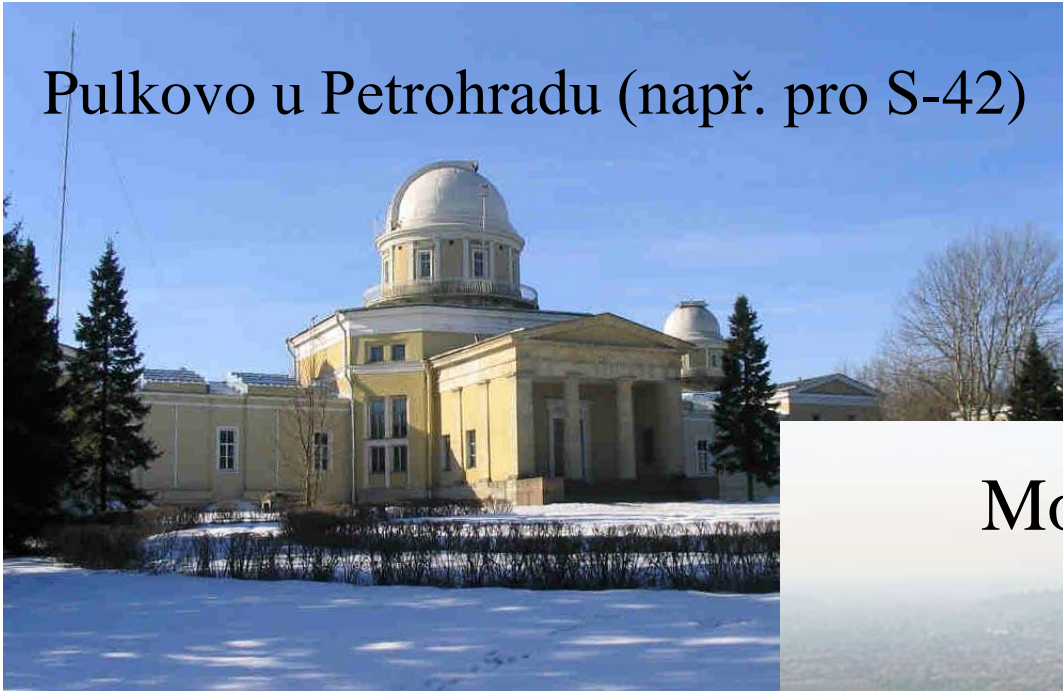
Z hlediska turisty stojícího před Královskou observatoří v Greenwichi: linie o nulové zeměpisné délce se ve skutečnosti nachází 102 m na východ od tabule s nápisem Základní poledník světa a čáry, která se od ní táhne.

Základní poledník

- Základní poledník procházející mysem Orchilla na nejzápadnějším ostrově Ferro (El Hiero) Kanárského souostroví byl původně definován jako bod 20° na západ od pařížského poledníku (ve skutečnosti $20^\circ 23' 9''$; tj. $18^\circ 08' 51''$ západně od Greenwiche).
- Kolem roku 1890 změřil německý geodet *Carl Theodor Albrecht*, že ferrský poledník má polohu $17^\circ 39' 46,02''$ západní délky.
- Při stanovování geodetické sítě byla ve 20. letech 20. století v Německu, Rakousku a v Československu použita hodnota $17^\circ 40'$ především z praktických důvodů.

Základní poledník

Pulkovo u Petrohradu (např. pro S-42)



Monte Mario (Roma)



Nekriticky převzaté hodnoty odstupů vybraných základních poledníků od „greenwichského“ poledníku podle různých autorů (červeně – přednostní):

Název poledníku	Odstup od Greenwiche
Ferro	-17°39'45,02“
	-17°39'46“
	-17°39'59,7“
	-17°39'46,02“ (Buchar, E.)
Amsterodam	4°53'00,9“
Paris	2°20'13,95“
Madrid	-3°41'14,55“
Lisabon (San Jorge)	-9°07'54,81“
Roma (Monte Mario)	12°27'08,04“
	12°27'06,84“
Pulkovo	30°19'42,09“
	30°19'38,55“
	30°19'38,8“
	30°19'28,318“ (S-42)

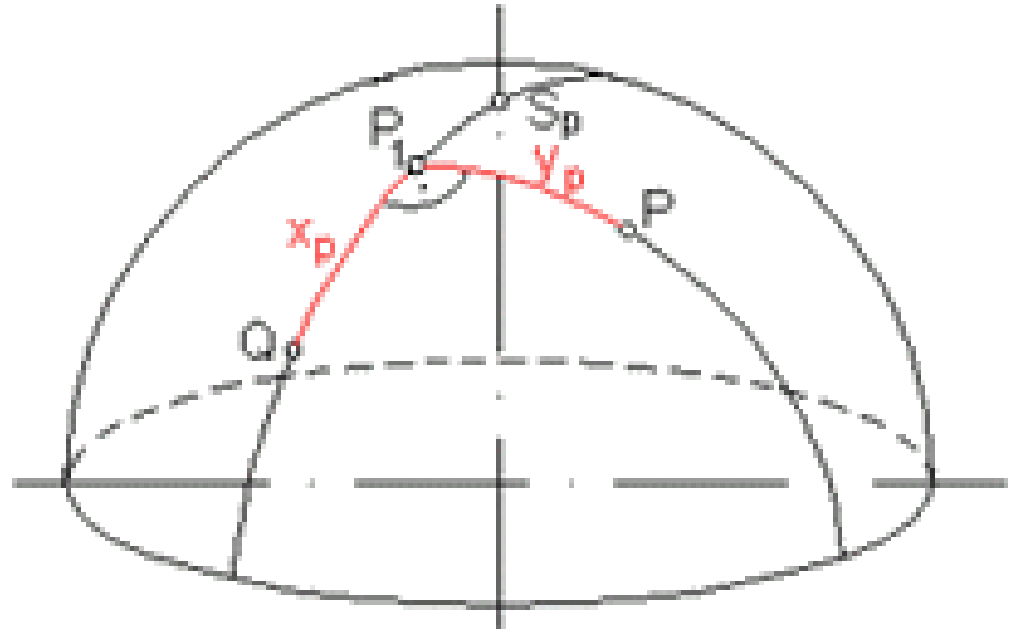
Základní rovnoběžka

Základní rovnoběžkou je **rovník (ekvátor)**.

- **Rovník** je nejdelší rovnoběžka, neboli čára spojující body s nulovou zeměpisnou šířkou. Je jedinou rovnoběžkou, která je ortodromou (viz dále).
- Rovník je průsečnice zemského povrchu s rovinou, procházející středem Země a kolmou k zemské ose.

Ortogonalní (Soldnerovy) souřadnice

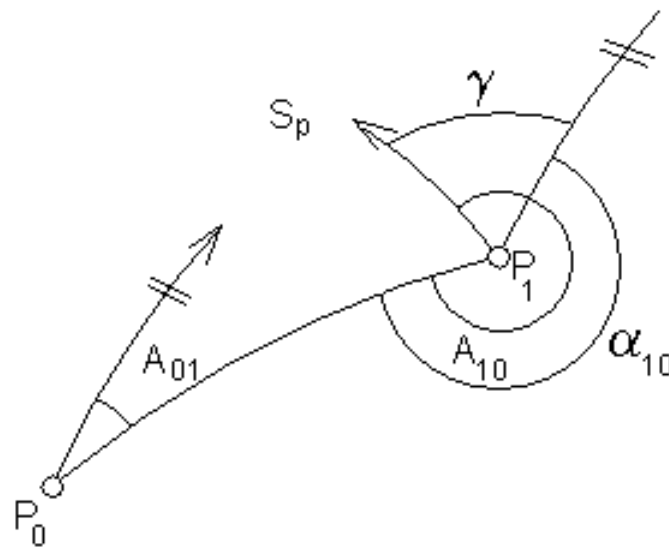
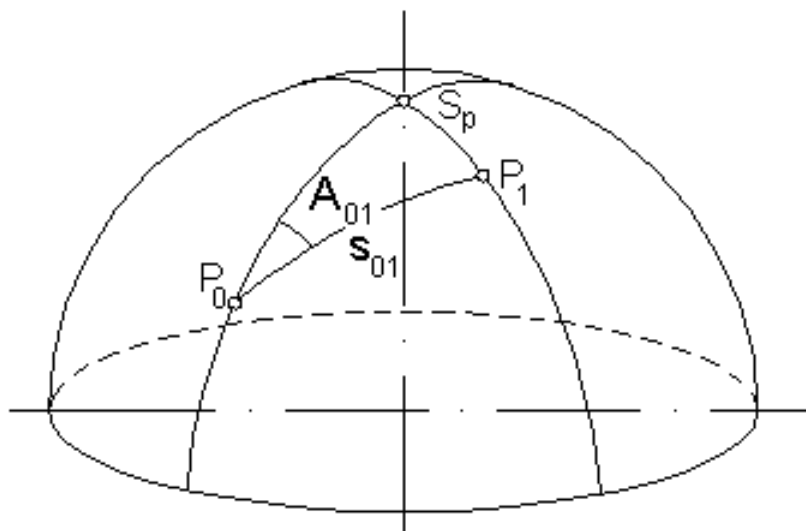
Zvolme bod $Q [U_0; V_0]$. Severní větev poledníku procházející tímto bodem označme jako kladnou větev osy x ; hlavní kružnice kolmá na poledník procházející bodem P pak tvoří osu y .



Polární sférické souřadnice

Polohu dvou bodů na referenční ploše můžeme určit pomocí azimutu \mathbf{A} jejich spojnice s (viz obr.), kde:

- α_{10} - sférický směrník
- γ - meridiánová konvergence ($\gamma = A_{10} - \alpha_{10}$)



Geodetické souřadnicové systémy

(1/2)

Hodnoty souřadnic v geodetických souřadnicových systémech jsou v současné době zjišťovány pomocí metod kosmické geodézie, např.:

- **VLBI** (*Very Long Baseline Interferometry*) je technologie zaměřování velmi vzdálených kvasarů, používá se především při definici polohy referenčních soustav (ICRF) a určování přesného univerzálního času (UT). Podstata spočívá v určování časového posunu a změny tohoto časového posunu v čase příchodu stejné vlny rádiového záření pocházejícího z mimogalaktických zdrojů na alespoň dva radioteleskopy. Přesnost je v řádu mikrosekund.
- **SLR** (*Satellite Laser Ranging*) je technologie zaměřování vzdálenosti mezi pozemní stanicí a družicí pulsním laserem. Střední kvadratická chyba je 2 - 3 cm.
- **LLR** (*Lunar Laser Ranging*) měří vzdálenost mezi Zemí a Měsícem se střední kvadratickou chybou 1 - 5 cm.

Geodetické souřadnicové systémy

(2/2)

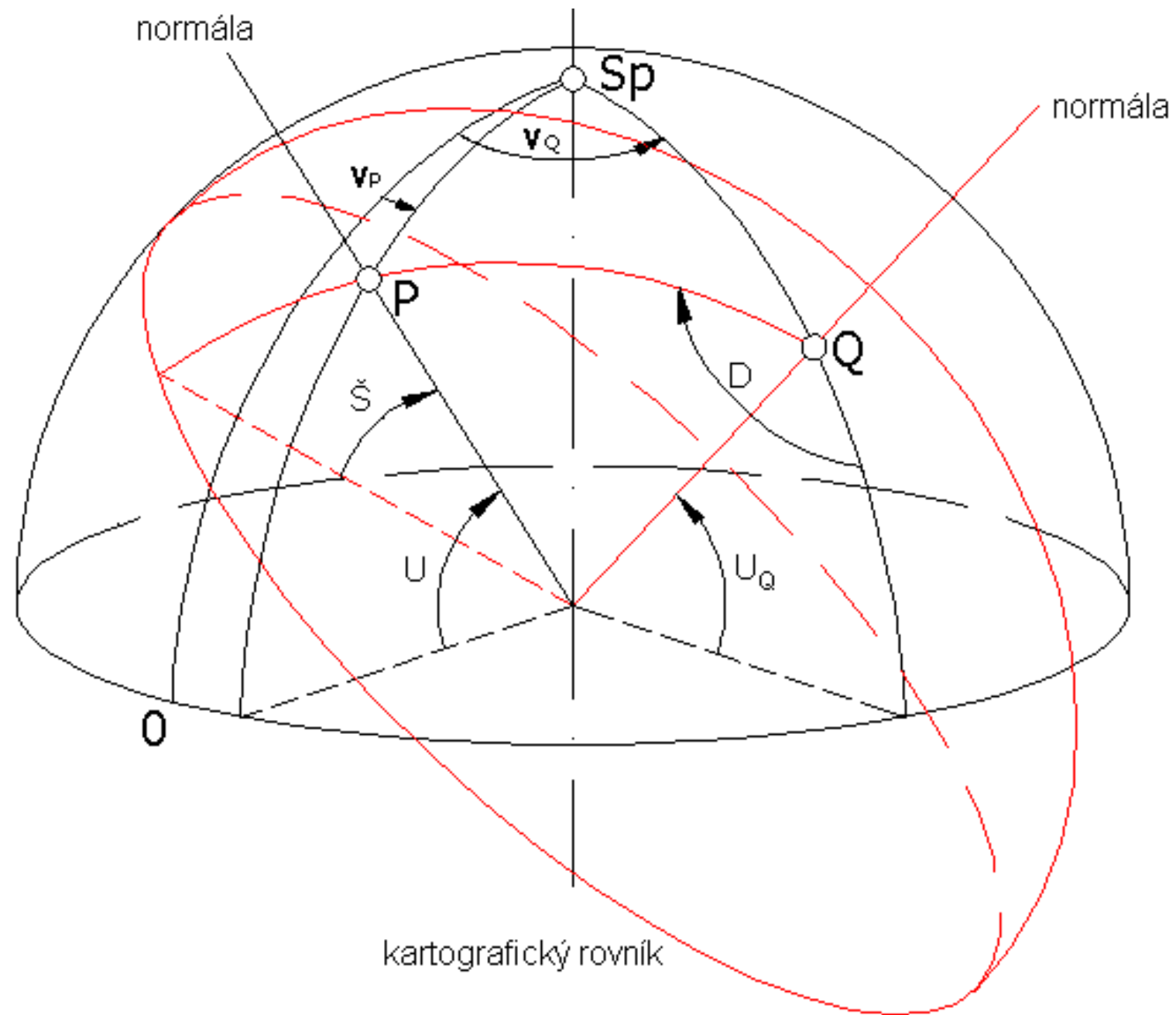
- **GNSS** (*Global Navigation Satellite System*) je rádiový dálkoměrný systém, kdy pomocí známé polohy družic a časovému zpoždění rádiové vlny mezi vysílačem (družice) a přijímačem lze určit polohu přijímače. Přesnost určení polohy je závislá na druhu a metodě GNSS (ve speciálních nebo vědeckých aplikacích může být až několik cm či mm).
- **DORIS** (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*) je systém založený na měření změn radiální vzdálenosti mezi pozemní stanicí a družicí na základě dopplerovského jevu. Přesnost změny vzdálenosti je charakterizována střední kvadratickou chybou 0,4 mm/s.
- **PRARE** (*Precise Range And Range-rate Equipment*) je založený na radiovém měření vzdáleností a změn vzdáleností s časem mezi stanicí a družicí.

Kartografické souřadnice

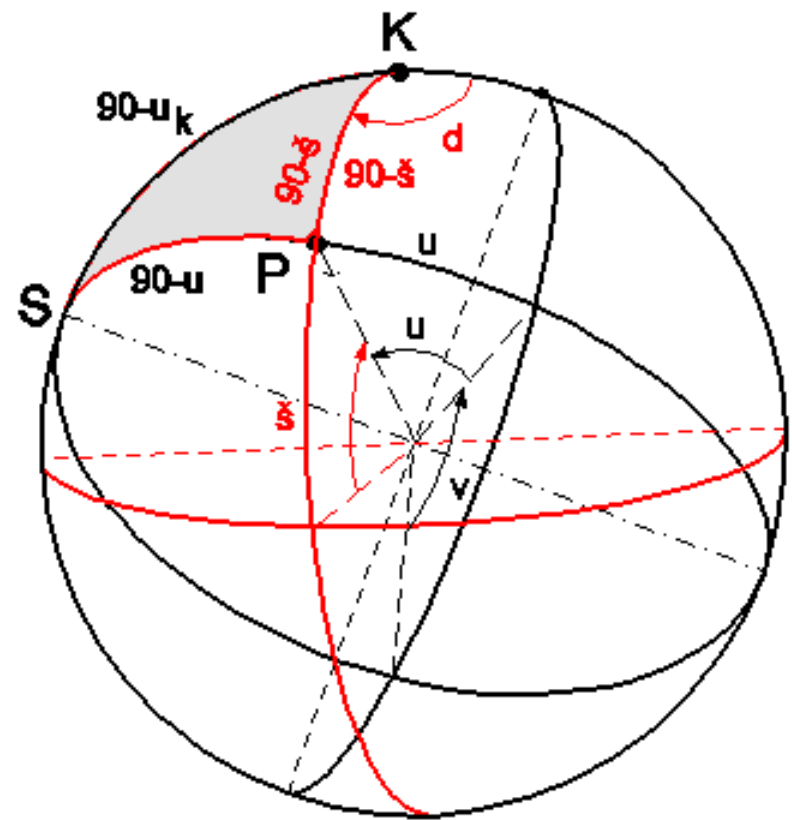
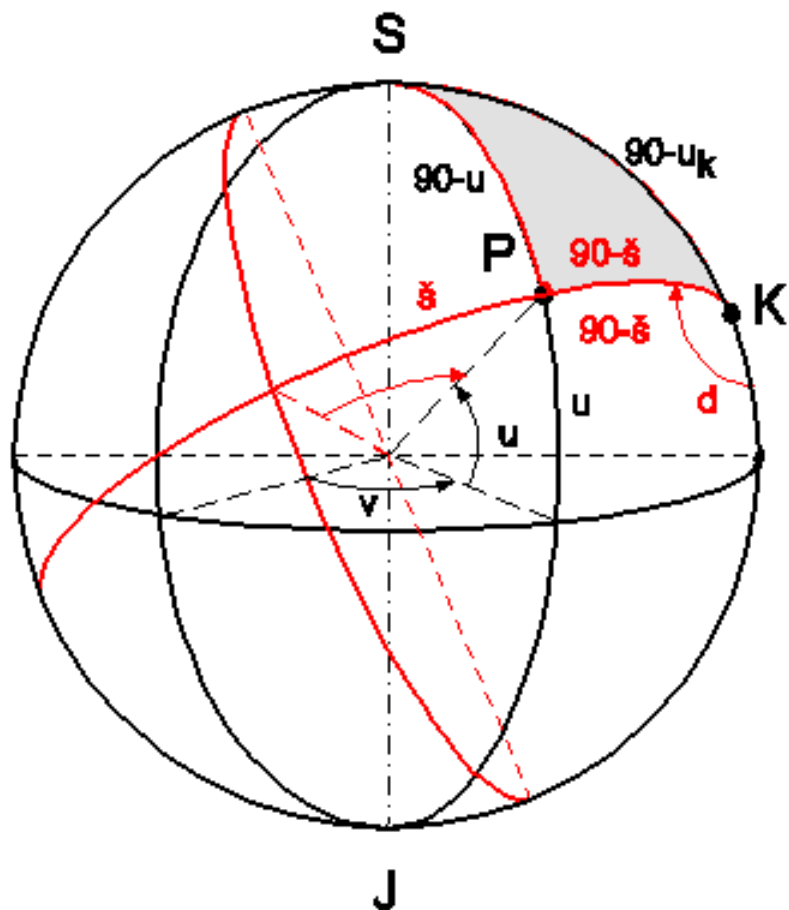
- Pro optimální volbu zobrazení a s tím související polohou zobrazovací plochy je vhodné určovat polohu bodů pomocí tzv. **kartografických souřadnic**. Osa zobrazovací plochy již nemusí být totožná se zemskou osou.
- Průsečík osy zobrazovací plochy s referenční plochou je kartografickým pólem Q.
- Definice kartografických souřadnic Š (kartografická šířka) a D (kartografická délka) je pak analogická k souřadnicím zeměpisným U, V.

Kartografické souřadnice

- Rozvinutelná plocha (např. plášť kužele nebo válce) se musí co nejlépe přimykát k referenční ploše. Proto osa zobrazovací plochy nebývá totožná se zemskou osou. Úloha je dobře řešitelná jen na kouli. Na tuto kouli je nutno nejprve vhodně zobrazit elipsoid.
- Známe-li souřadnice nového (kartografického) pólu U_Q , V_Q (dále označeny i jako U_K , V_K) a zeměpisné souřadnice bodu P (U, V), pak lze pomocí vět sférické trigonometrie vypočítat kartografické souřadnice \check{S} , D bodu P .



Zeměpisné a kartografické souřadnice



Vztahy (U,V) a (Š,D)

V obou případech jsou použity věty sférické trigonometrie.

Převod mezi (U,V) a (Š,D)

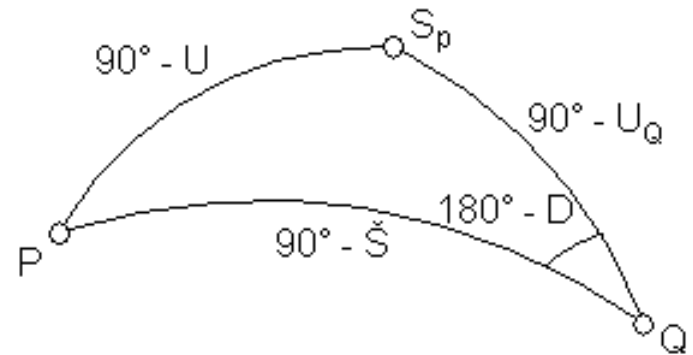
$$\sin \check{S} = \sin U_k \sin U + \cos U_k \cos U \cos \Delta V$$

$$\sin D = \frac{\sin \Delta V \cos U}{\cos \check{S}}$$

Převod mezi (Š,D) a (U,V)

$$\sin U = \sin \check{S} \sin U_k - \cos \check{S} \cos U_k \cos D$$

$$\sin \Delta V = \frac{\sin D \cos \check{S}}{\cos U}$$



Izometrické souřadnice

Podle matematické definice jsou izometrické souřadnice takové, kde čtverec délkového elementu lze vyjádřit jako součet čtverců délkových elementů v jednotlivých souřadnicových osách, případně ještě vynásobený vhodnou funkcí obou souřadnic.

Izometrické souřadnice

- Izometrických souřadnic se s výhodou užívá při odvozování vztahů pro zkreslení.
- Označíme-li si je např. ξ , η , pak pro délkový element musí platit vztah:

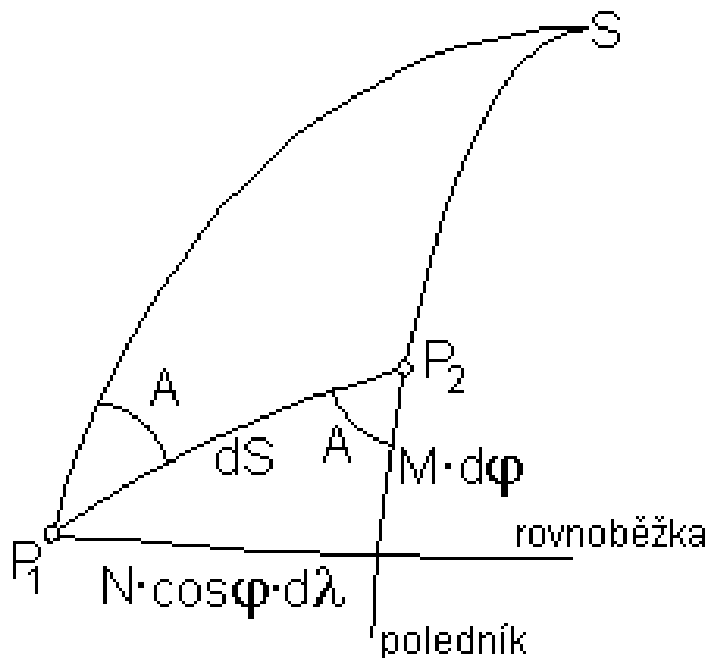
$$ds^2 = f(\xi; \eta) \cdot (\xi^2 + \eta^2)$$

- Pro rovinné souřadnice x , y platí:

$$ds^2 = x^2 + y^2$$

neboli: souřadnice x , y v rovině jsou izometrické.

Izometrické souřadnice



Pro délkový element na kouli (při poloměrech křivosti M , N) platí vztahy:

$$ds^2 = M^2 \cdot d\varphi^2 + N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\lambda^2$$

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \left(\frac{M^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi^2 + d\lambda^2 \right)$$

Izometrické souřadnice

Aby vztah (viz předcházející snímek) vyhovoval formulaci symetrických souřadnic, pak je třeba užít substituce:

$$\frac{M}{N \cdot \cos \varphi} \cdot d\varphi = dq$$

Pak platí:

$$ds^2 = N^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot (dq^2 + d\lambda^2)$$

Souřadnice q , λ již formulaci vyhovují a jsou tedy izometrické.

Izometrické souřadnice

Pro izometrickou šířku q platí:

$$q = \int_0^{\varphi} \frac{M}{N \cdot \cos \varphi} \cdot d\varphi$$

Po dosazení za M a N :

$$q = \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\frac{1 + e \cdot \sin \varphi}{1 - e \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

Izometrické souřadnice

Izometrickou šířku na kouli označujeme Q a vztahy se tak díky $M = N = R$ zjednoduší na:

$$Q = \int_0^U \frac{1}{\cos U} \cdot dU = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Pravoúhlé prostorové souřadnice

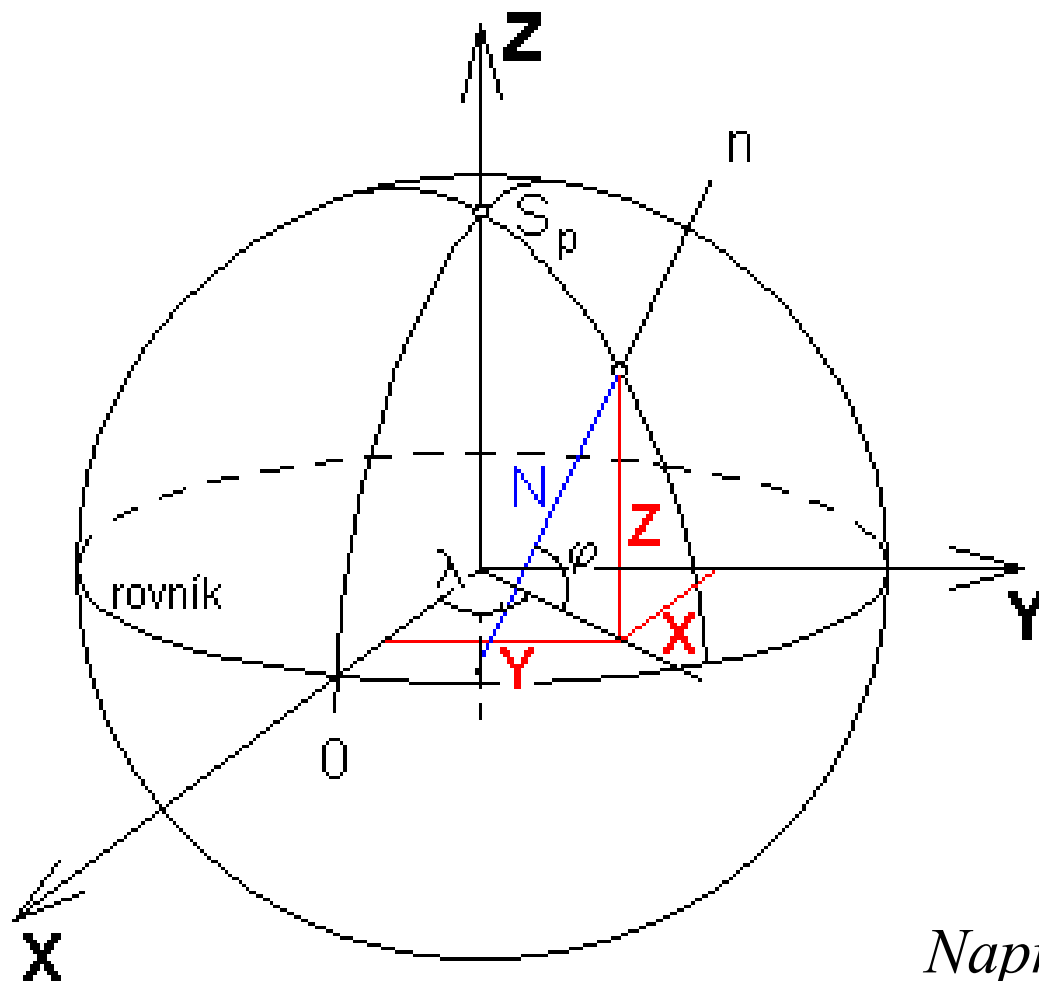
- Osa X je průsečnice roviny rovníku s rovinu nultého poledníku.
- Osa Z leží v ose zemské rotace.
- Osa Y je v rovině rovníku, kolmá na osu X (doplňuje souřadnicovou soustavu na pravotočivou).

$$X = N \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y = N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

$$Z = N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi$$

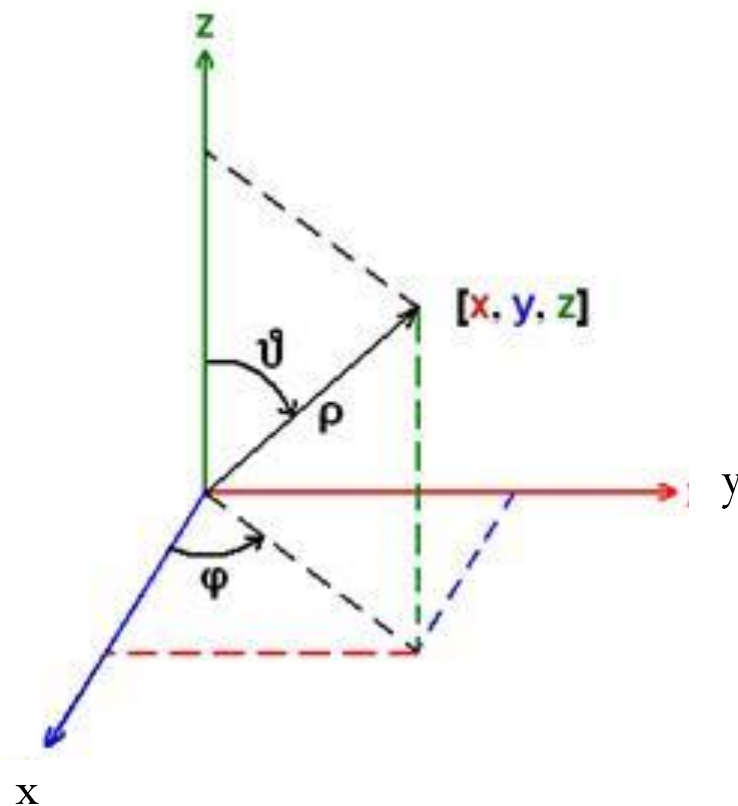
Pravoúhlé prostorové souřadnice

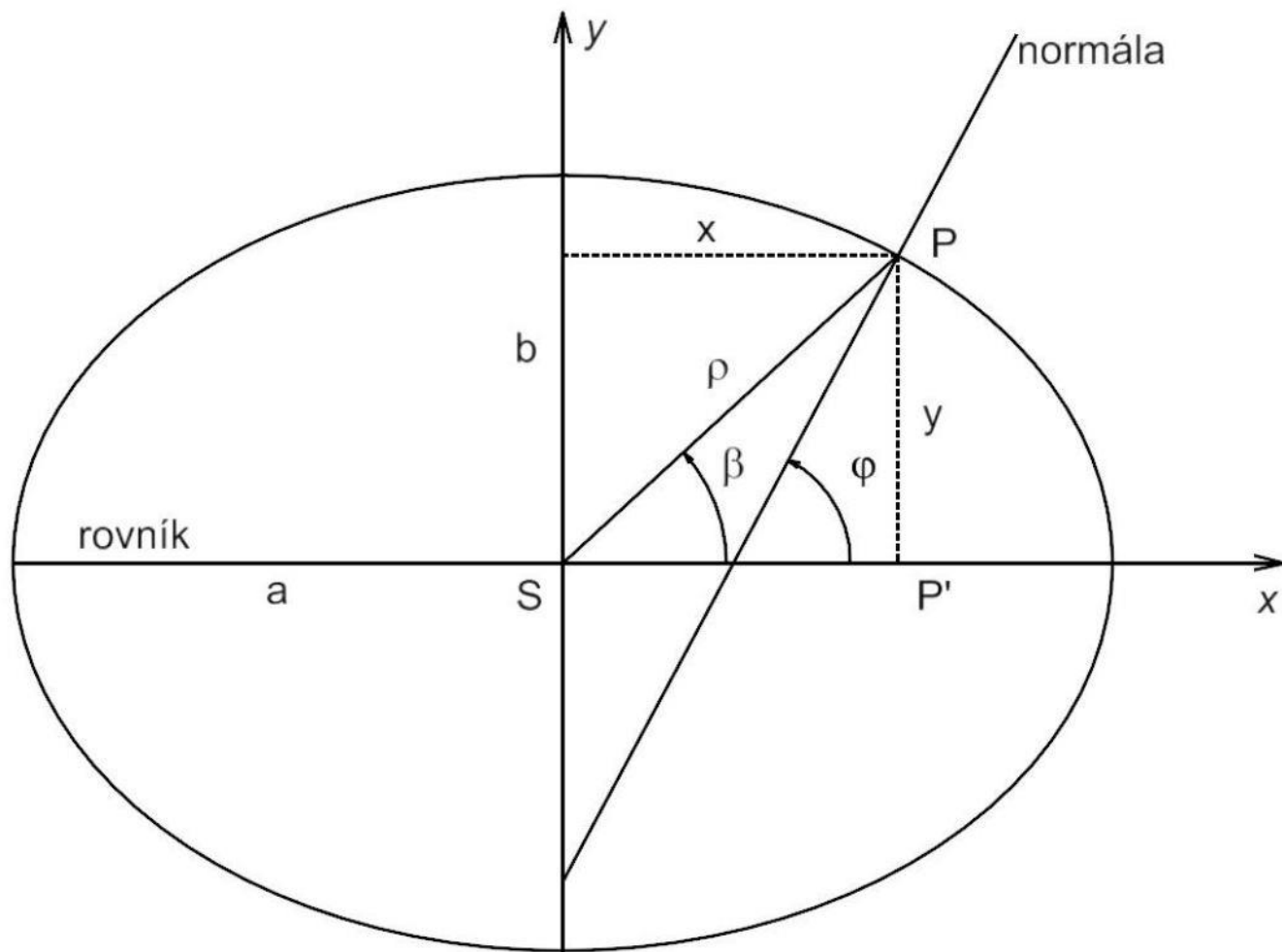


Např. WGS84

Polární prostorové souřadnice

Sférická soustava polárních souřadnic je soustava souřadnic v prostoru, u které jedna souřadnice ρ udává vzdálenost bodu od počátku souřadnic, druhá souřadnice φ udává úhel průmětu průvodiče bodu do roviny xy od osy x a třetí souřadnice ϑ úhel průvodiče od zvolené roviny xy , respektive od osy z .





Srovnej zeměpisné, geocentrické, polární a pravoúhlé prostorové souřadnice.

Souřadnice na rovinné ploše

- Pravoúhlé souřadnice (x, y) – *bez komentáře*
- Polární souřadnice (ρ, ε)

Polární souřadnice

Polární souřadnice v rovině kartografického zobrazení (ρ , ε):

ρ - vzdálenost bodu od počátku souřadného systému (např. obraz vrcholu kužele),

ε - úhel mezi spojnicí počátek-bod P a osou x.

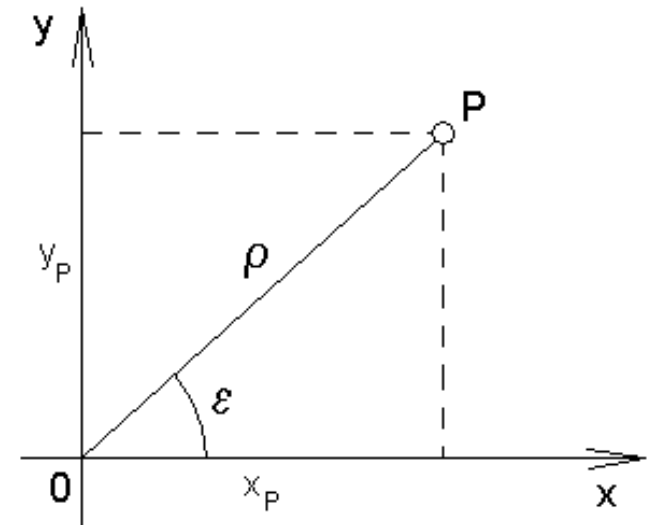
Používají se u kuželových a azimutálních zobrazení, především pro snadnější vyjádření zobrazovacích rovnic.

$$x = \rho \cdot \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \cdot \sin \varepsilon$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$$



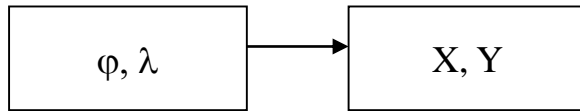
Transformace

Transformace

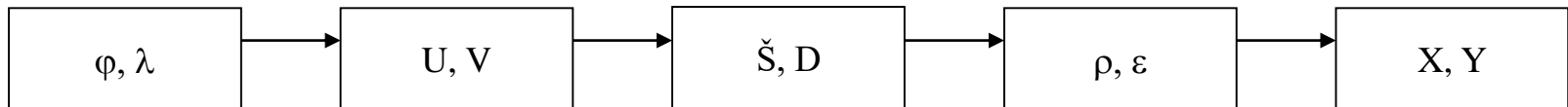
Základní úlohou matematické kartografie je určení matematických vztahů mezi jednotlivými souřadnicovými systémy a jejich transformace do roviny (kartografické průmětny).

Transformační „kaskády“ vybraných národních kartografických děl

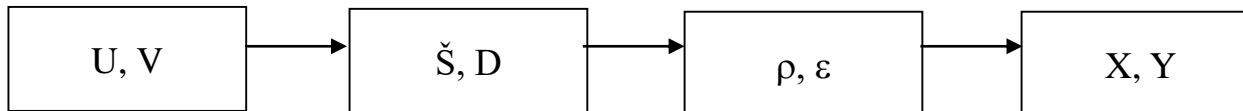
Vojenské topografické mapy



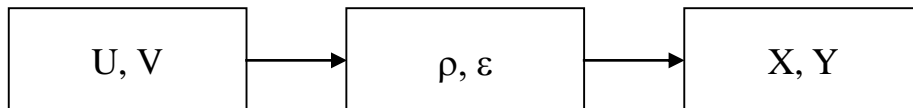
Základní mapy ČSR (ČSSR,)



Vojenský zeměpisný atlas (mapy kontinentů)



Atlas ČSSR



Důležité křivky na referenčních plochách

Důležité křivky na referenčních plochách

- *Čáry geodetické sítě.*
- *Geodetická křivka - čára spojující na referenční ploše nejkratší cestou dva koncové body. Její hlavní normála je v každém bodě totožná s normálou referenční plochy (zemský poledník je geodetickou křivkou, zemská rovnoběžka nikoliv).*
- *Ortodroma – geodetická křivka na kouli (hlavní kružnice).*
- *Loxodroma – křivka na referenční ploše, která protíná poledníky pod stejným úhlem.*

Ortodroma

Délku ortodromy mezi dvěma body P_0 a P o souřadnicích U_0, V_0 a U, V vyplyne ze vztahu:

$$\cos \overline{P_0P} = \cos \frac{l}{R} = \cos(90^\circ - U_0) \cos(90^\circ - U) + \sin(90^\circ - U_0) \sin(90^\circ - U) \cos \Delta V$$

Pro azimut počátečního a koncového bodu platí:

$$\sin(180^\circ - A) \sin(90^\circ - U) = \sin A_0 \sin(90^\circ - U_0)$$

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A_0 \cos \Delta V + \sin A_0 \sin \Delta V \cos(90^\circ - U_0)$$

Loxodroma

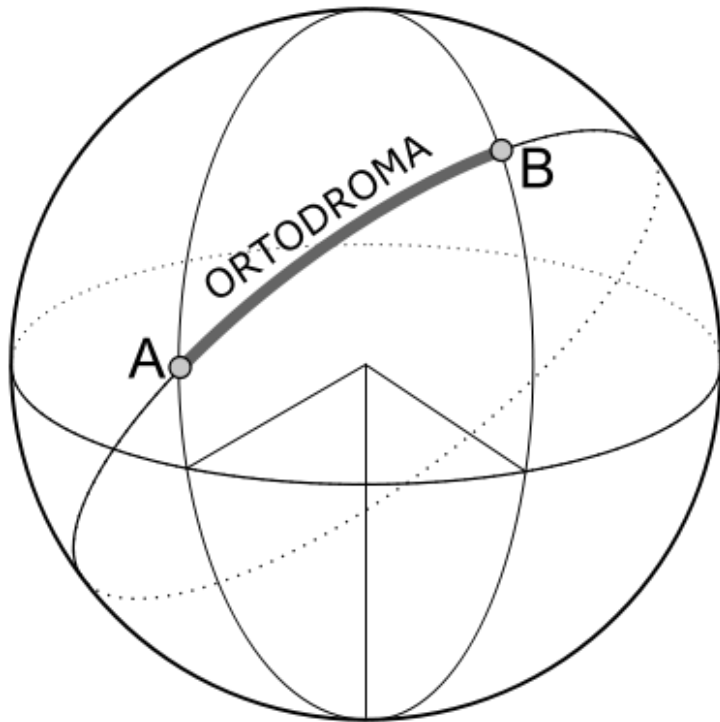
- Pro výpočet délky loxodromy mezi koncovými body o zeměpisných šířkách U_2 a U_1 platí jednoduchý vztah:

$$l \cos A = R(U_2 - U_1)$$

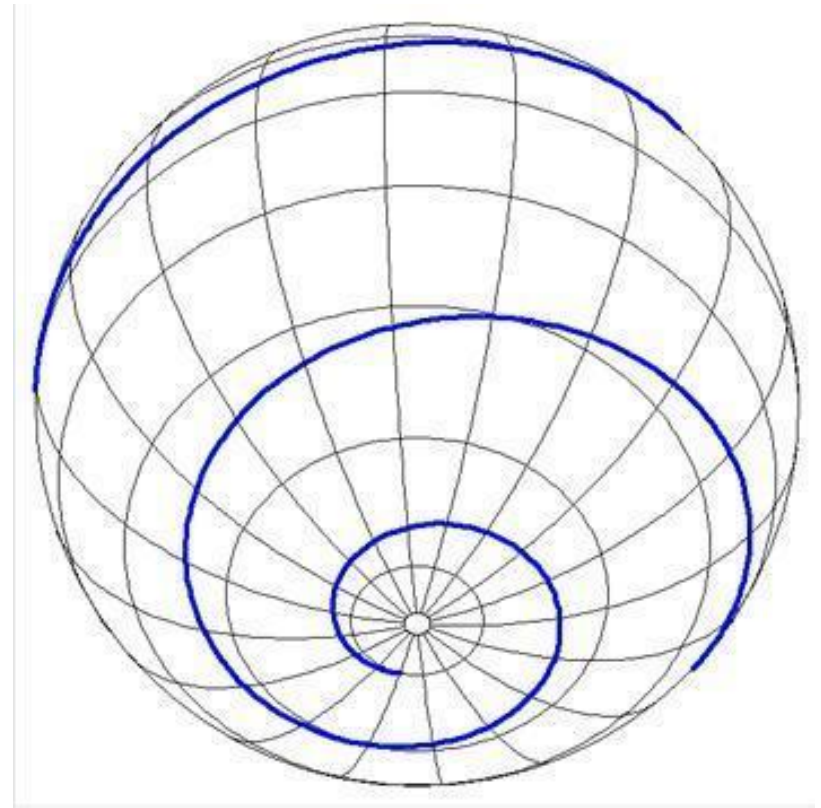
- Azimut loxodromy:

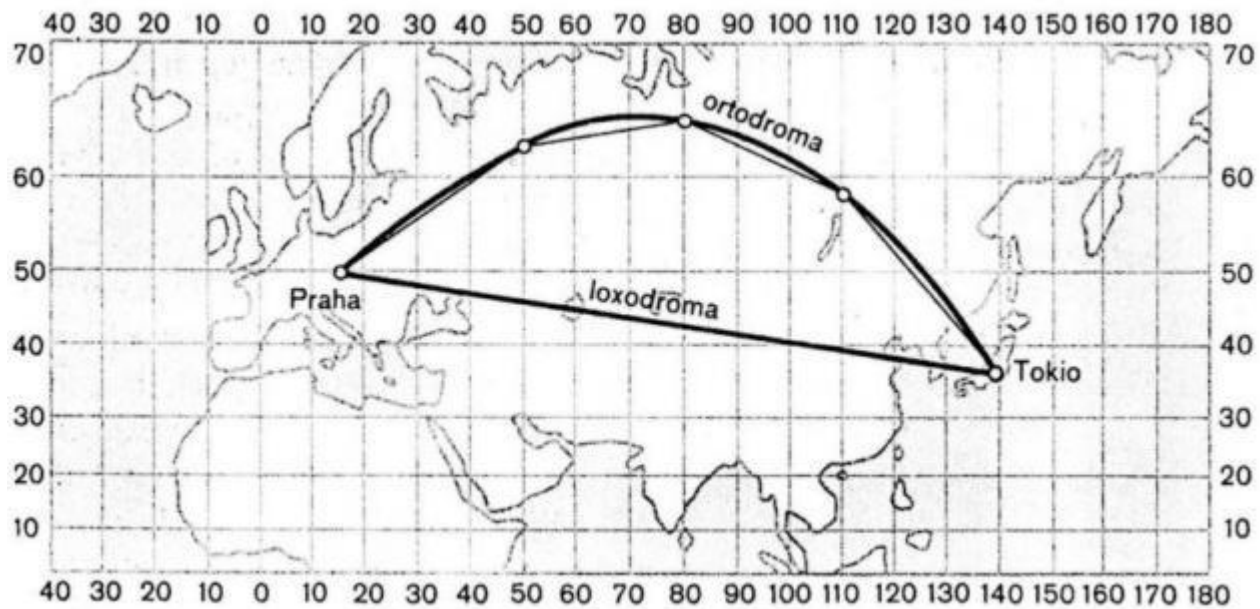
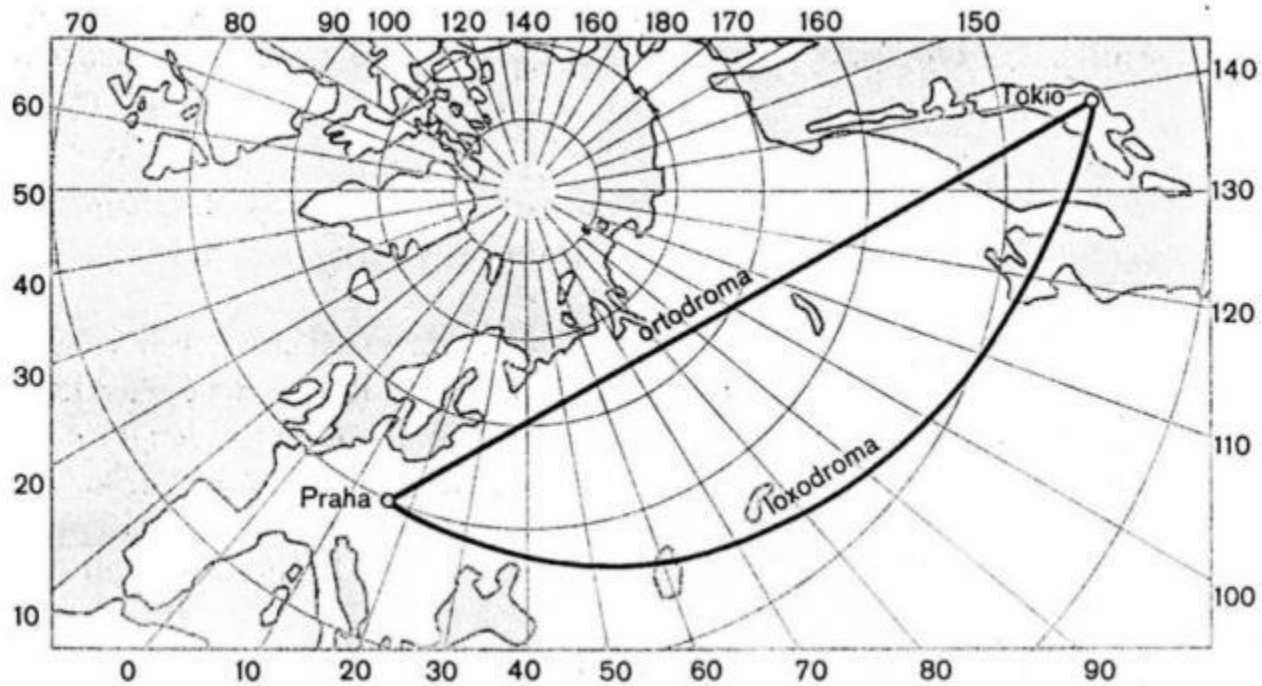
$$\operatorname{tg} A = \frac{V_2 - V_1}{\left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{U_1}^{U_2}}$$

Ortodroma



Loxodroma





Kartografická zobrazení

Kartografické zobrazení

- **Kartografické zobrazení** je proces, který každému bodu na referenční ploše přiřadí odpovídající bod na zobrazovací ploše. Je matematicky jednoznačně vyjádřen vztahy mezi souřadnicemi bodů na referenční a zobrazovací ploše (v některých případech na dvou referenčních plochách), tzv. **zobrazovacími rovnicemi**.
- Speciální typ zobrazení vzniklého promítáním označujeme jako (geometrickou) **projekci**.

Kartografické zobrazení

Kartografické zobrazení lze dnes definovat jako metodu matematického přiřazení polohy každého bodu na zemském povrchu (na jeho náhradní ploše, např. referenčním elipsoidu) k témuž bodu na zobrazovací (kartografické) ploše.

Poloha bodu na referenčním elipsoidu může být dána buď sférickými souřadnicemi (např. zeměpisná šířka a délka), prostorovými pravoúhlými souřadnicemi (X, Y, Z), nebo prostorovými polárními souřadnicemi (ρ, φ, ϑ).

Kartografické zobrazení

Každý bod, kartograficky zobrazený na mapě, pak může mít:

- souřadnice sférické (např. zeměpisné φ , λ) a/nebo rovinné pravoúhlé v použitém kartografickém zobrazení (např. x , y v systému S-42, y , x v S-JTSK či E, N ve WGS 84/UTM)

nebo

- **kódované**, v tzv. hlásných systémech MGRS (*Military Grid Reference System*), nebo GEOREF (*Geographic Reference Frame*) či,
- **parametrické** (např. poštovní adresa).

Zobrazovací rovnice

Zobrazovací rovnice představují předpis pro převod sférických souřadnic na kartografickou plochu (průmětnu). *Při tomto převodu obvykle dochází ke (kartografickému) zkreslení.*

Např. při zobrazení elipsoidu do roviny mapy mají zobrazovací rovnice obecný tvar

$$X = f(\varphi, \lambda) \text{ a } Y = g(\varphi, \lambda)$$

- přičemž funkce f a g jsou spojité, nezávislé a jednoznačně diferencovatelné,
- póly jsou singulární body.

Kartografické zkreslení

Kartografické zkreslení je deformace způsobená rozdílnou křivostí originálu a obrazu.

Rozlišujeme zkreslení:

- **délkové** (m), neboli poměr obrazů délkových elementů nekonečně malé délky na zobrazovací ploše k jejich délce na originálu (referenční ploše),
- **plošné** (P), neboli poměr odpovídajících si plošných elementů v obraze a v originále; prakticky se vyšetřuje jako součin délkových zkreslení ve směru poledníkovém a rovníkovém,
- **úhlové (směrníkové)**, které představuje rozdíl velikosti směrníku (úhlu) v obraze a originálu,
- **geodetické křivosti**, což je rozdíl geodetické křivosti obrazu křivky a geodetické křivosti křivky v originále.

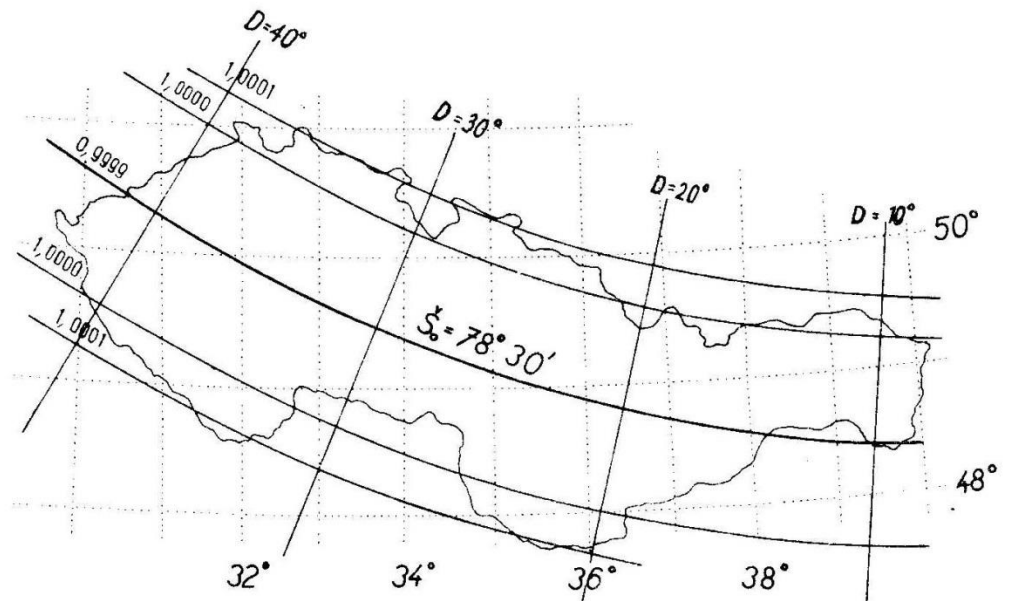
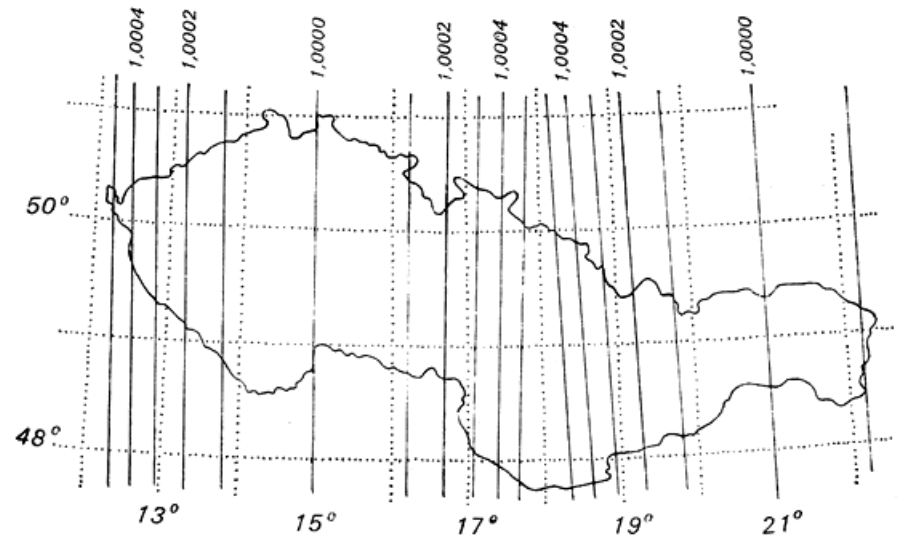
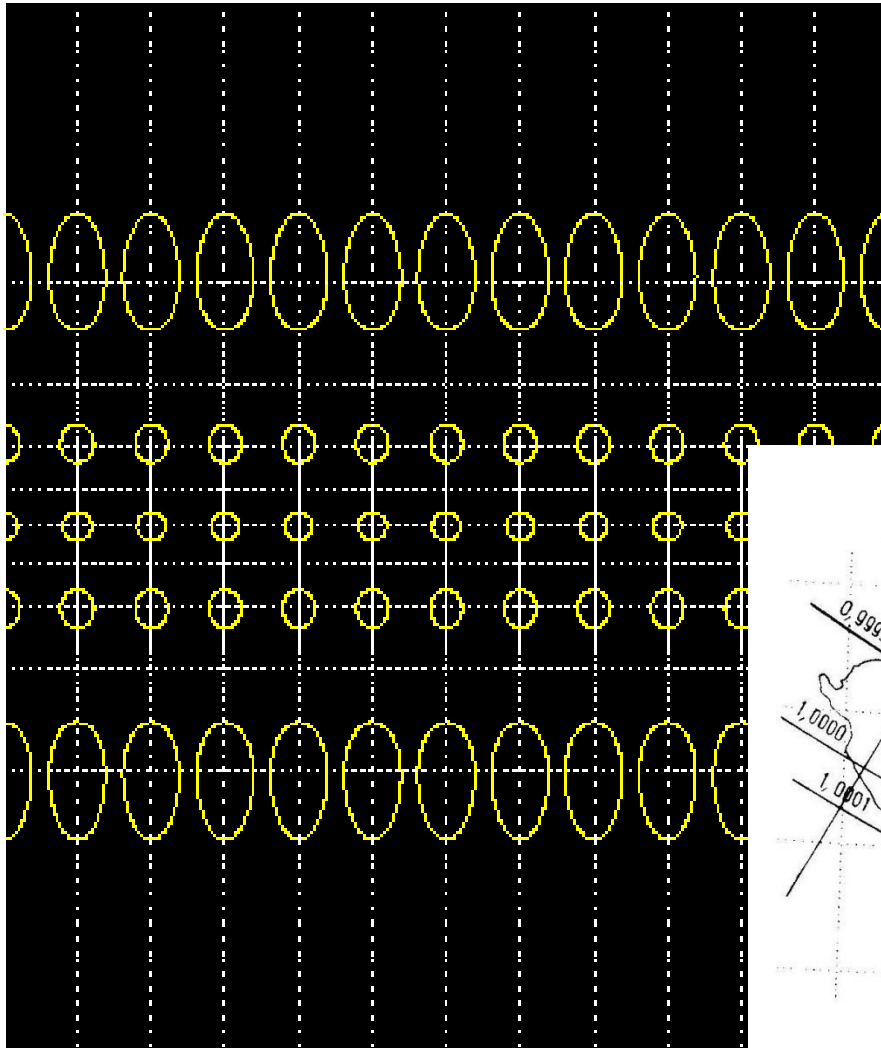
Ekvideformáty

Celkový charakter deformací mapového obrazu umožňují vyhodnocovat tzv. **ekvideformáty** (též izodeformáty). Tvoří je množina bodů konstantního zkreslení vykreslená v zobrazovací rovině (*příklady viz následující snímek*).

Ekvideformáty mohou být konstruovány pro průběh délkového, plošného nebo úhlového zkreslení.

Protože délkové zkreslení je závislé nejen na poloze bodu, ale i na azimutu (s výjimkou konformního zobrazení), mohou délkové ekvideformáty vyjadřovat délkové zkreslení platné pouze pro určitý směr. Zpravidla se volí směr poledníků nebo rovnoběžek. V každém místě se zkreslení mění nejrychleji ve směru kolmém k ekvideformátům.

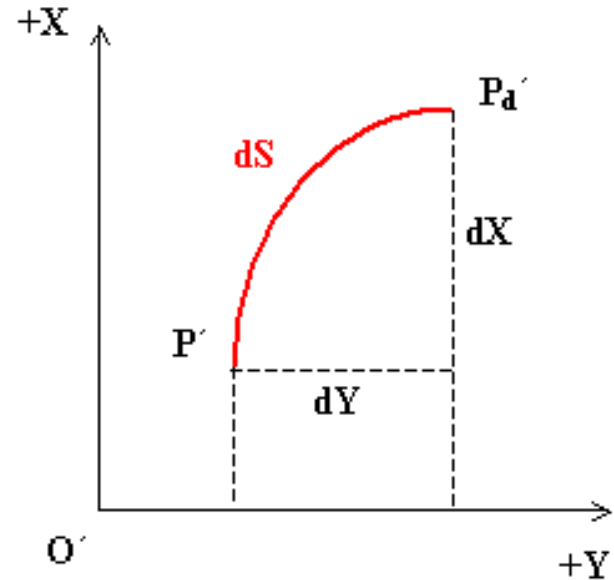
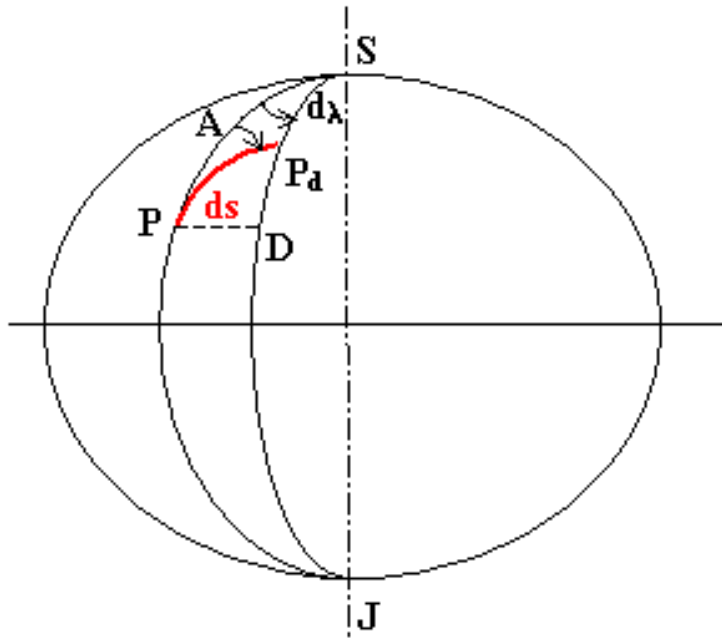
Ekvideformáty



Limity zkreslení ...

- ... pro vizuální vjem mapy: maximální zkreslení délek a ploch 8 %, zkreslení úhlů 8° ,
- ... pro vizuální porovnání map: maximální zkreslení délek a ploch 3 %, zkreslení úhlů 3° ,
- ... pro kartometrická šetření: maximální zkreslení délek a ploch 0,4 %, zkreslení úhlů $0,5^\circ$.

Délkové zkreslení



$$m_A^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda}$$

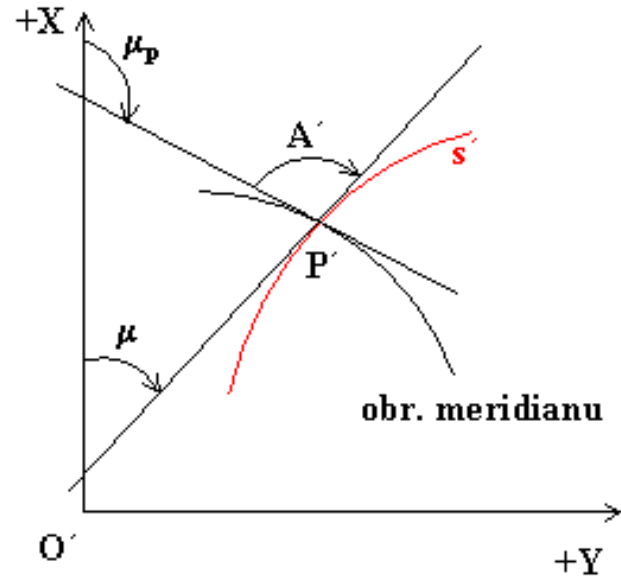
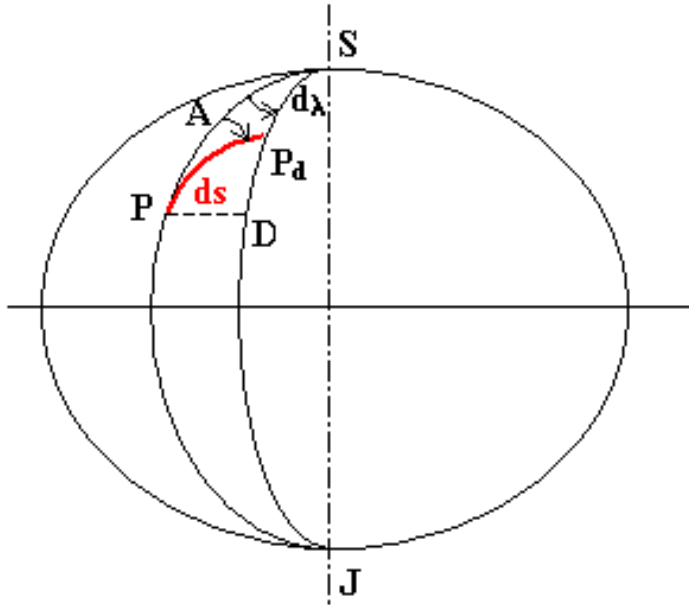
Délkové zkreslení

Je závislé nejen na poloze bodu, ze kterého délkový element vychází, ale i na jeho směru, a proto se vyšetřuje ve dvou základních směrech: poledníkovém (m_p) a rovnoběžkovém (m_r).

$$m_A^2 = \frac{f_\varphi^2 + g_\varphi^2}{M^2} \cos^2 A + \frac{f_\lambda^2 + g_\lambda^2}{N^2 \cos^2 \varphi} \sin^2 A + \frac{2(f_\varphi f_\lambda + g_\varphi g_\lambda)}{MN \cos \varphi} \sin A \cos A$$

$$m_p = \frac{\sqrt{f_\varphi^2 + g_\varphi^2}}{M}, \quad m_r = \frac{\sqrt{f_\lambda^2 + g_\lambda^2}}{N \cos \varphi}$$

Zkreslení úhlů

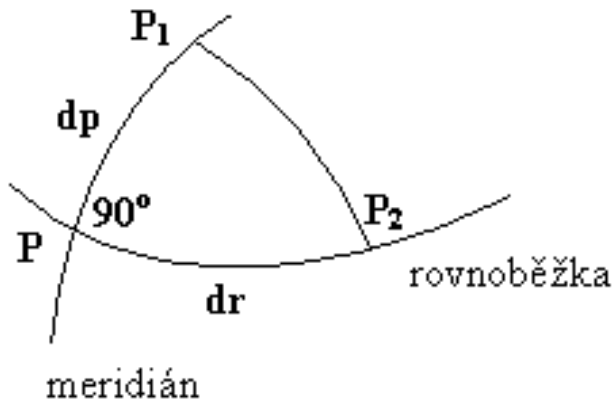


$$\operatorname{tg}(180^\circ - A') = \operatorname{tg}(\mu_p - \mu) = \frac{\operatorname{tg} \mu_p - \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \mu_p \operatorname{tg} \mu}$$

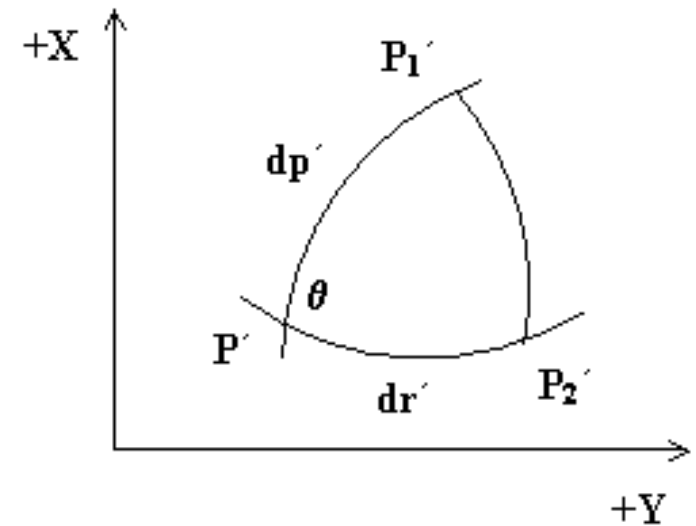
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{dY}{dX} = \frac{g_\varphi N \cos \varphi \cos A + g_\lambda M \sin A}{f_\varphi N \cos \varphi \cos A + f_\lambda M \sin A} \quad \text{a při } A=0^\circ \quad \operatorname{tg} \mu_p = \frac{g_\varphi}{f_\varphi}$$

Zkreslení ploch

elipsoid



rovina



$$P = \frac{\frac{1}{2} dp' dr' \sin \theta}{\frac{1}{2} dp dr} = m_p m_r \sin \theta = \frac{f_\varphi g_\lambda - f_\lambda g_\varphi}{MN \cos \varphi}$$

$$f_\varphi g_\lambda - f_\lambda g_\varphi = MN \cos \varphi$$

obecná podmínka
ekvivalentního zobrazení

Klasifikace kartografických zobrazení

Kartografická zobrazení

Celkem existuje asi 300 zobrazení (z toho asi 50 je tzv. jednoduchých a 250 obecných), v praxi se používá jen několik desítek zobrazení.

Zobrazovací plochu tvoří nejčastěji rovina, plášť válce nebo plášť kužele (poloha obrazu bodu se na ní určuje v pravoúhlých nebo polárních souřadnicích).

Klasifikace kartografických zobrazení:

- podle zkreslení,
- podle zprostředkující zobrazovací plochy a polohy její konstrukční osy,
- podle zobrazovacích rovnic a tvaru obrazů poledníků a rovnoběžek,
- podle ploch, mezi kterými se zobrazuje (tj. elipsoid - koule, koule - rovina, elipsoid - rovina). *Sem patří i rozdělení na zobrazení přímé (elipsoid - rovina) a dvojité (elipsoid - koule - rovina).*

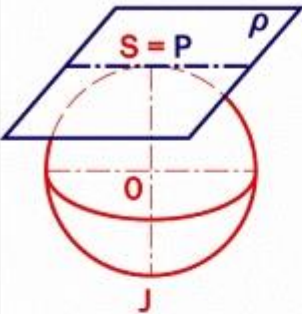
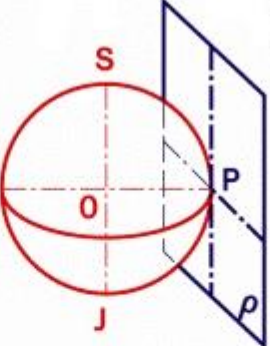
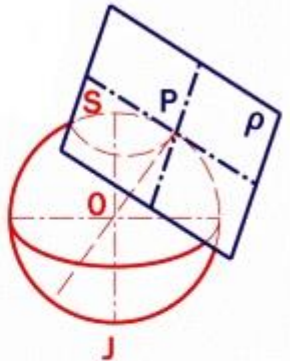
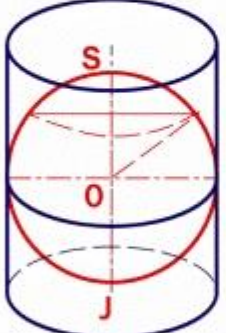
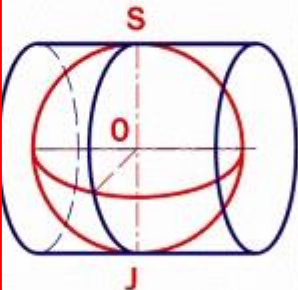
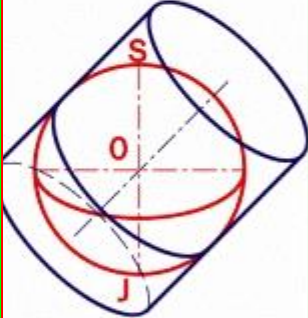
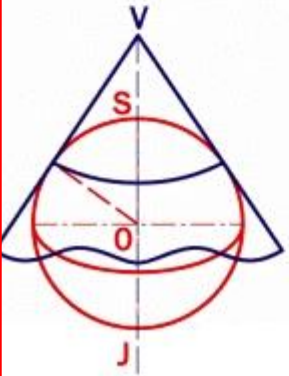
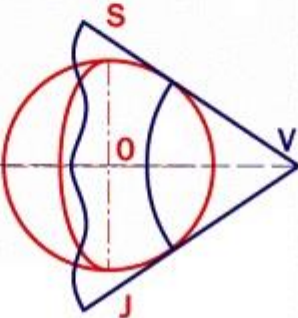
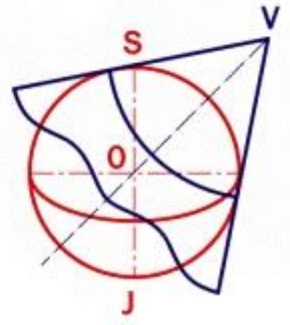
... podle zkreslení

- Zobrazení, ve kterých nejsou zkresleny úhly označujeme jako **konformní, též úhlojevná, stejnoúhlá**.
- Zobrazení, ve kterých nejsou zkresleny plochy označujeme jako **ekvivalentní, též plochojevná, stejnoplochá**.
- Zobrazení, ve kterých nejsou zkresleny délky označujeme jako **ekvidistantní** (v některém směru), též **délkojevná, stejnodélková/stejnodélná**.
- **Vyrovňovací (kompenzační)**, ve kterých je plošné a úhlové zkreslení optimalizováno.

... podle zprostředkující zobrazovací plochy a polohy její konstrukční osy

- **Podle zprostředkující zobrazovací plochy:**
 - zobrazení azimutální (dotyková nebo sečná rovina),
 - zobrazení válcová (dotykový nebo sečný válec),
 - zobrazení kuželová (dotykový nebo sečný kužel).
- **Podle polohy konstrukční osy:**
 - zobrazení normální (pólová),
 - zobrazení příčná (transversální, rovníková, ekvatoreální),
 - zobrazení obecná (šikmá).

Často používané

		Poloha			
		normální	příčná	obecná	
Zobrazení	azimutální				Nizozemsko
	válcové				Švýcarsko
	kuželové				Jen ČR a SR

... podle zobrazovacích rovnic

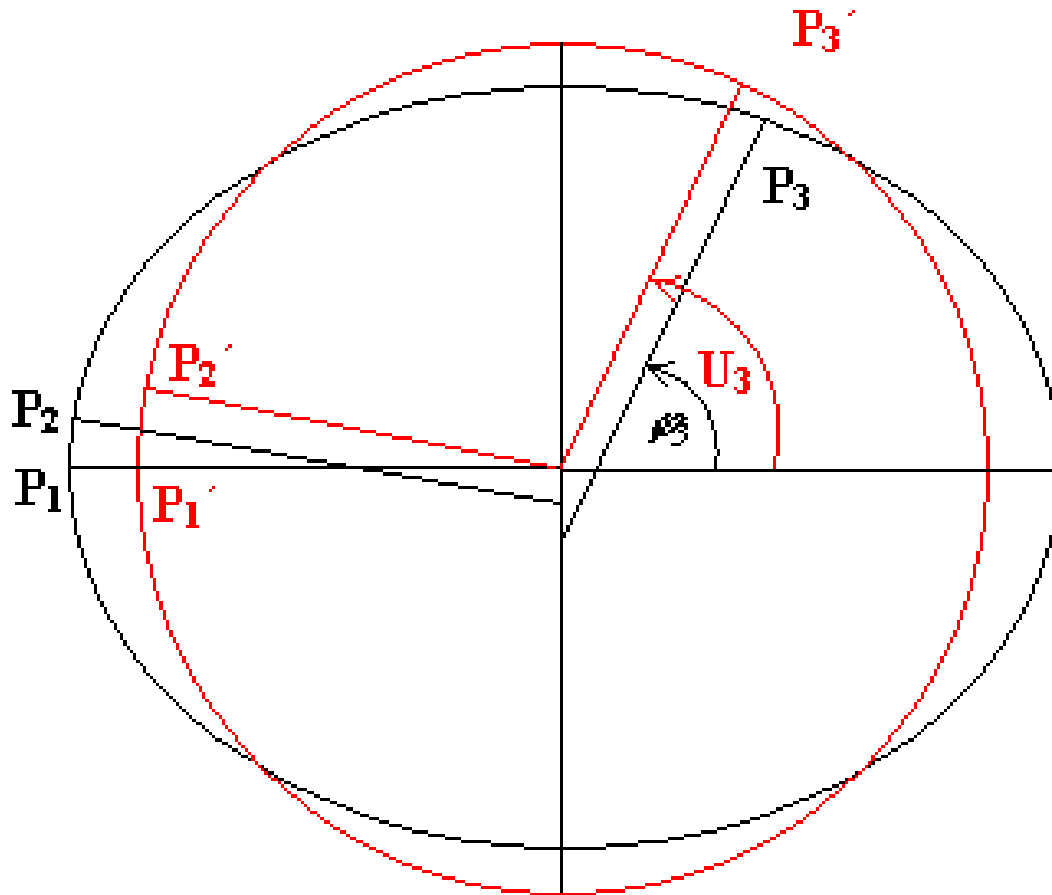
- Zobrazení na kouli
- Zobrazení jednoduchá $X = f(U), Y = g(V)$
- Zobrazení nepravá $X = f(U, V), Y = g(U, V)$
- Zobrazení složená (nesouvislá, složená z více ploch, pásů, pruhů – poskytující nesouvislý obraz):
polyedrická, polykónická, polykonická
- Zobrazení neklasifikovaná (jiná, obecná)

Zobrazení na kouli

Nejjednodušším postupem pro získání obrazu zemského elipsoidu na kouli je prosté nahrazení elipsoidu koulí o vhodném poloměru R .

Hodnoty zeměpisných souřadnic se zachovávají. Všechna zkreslení jsou funkcí zeměpisné šířky a kromě úhlového zkreslení závisí na zvoleném poloměru koule R .

Zobrazení na kouli



$$U = \varphi, \quad V = \lambda$$

$$m_p = \frac{R}{M}, \quad m_r = \frac{R}{N}, \quad P = \frac{R^2}{MN}, \quad \sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{M - N}{N + N}$$

Jednoduchá zobrazení

Jednoduchá (jednoduše definovaná) zobrazení jsou taková, pro něž je možno napsat takové zobrazovací rovnice, podle nichž **každá z rovinných souřadnic (polárních nebo pravoúhlých) a výrazy pro zkreslení (závisle proměnné) se dají vyjádřit funkcemi pouze jedné souřadnice (nezávisle proměnné) na referenční ploše.**

Zobrazení jednoduchá

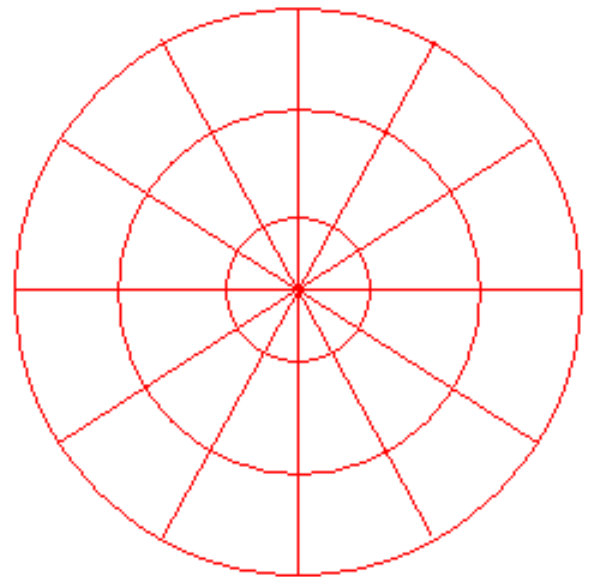
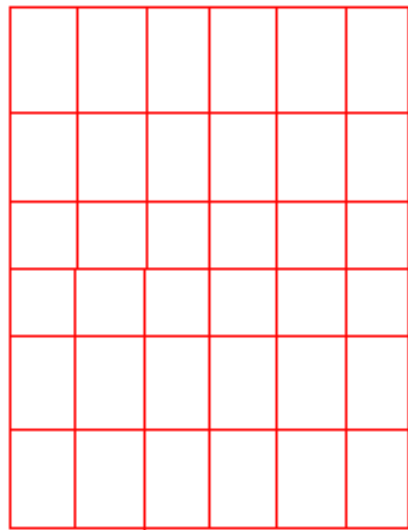
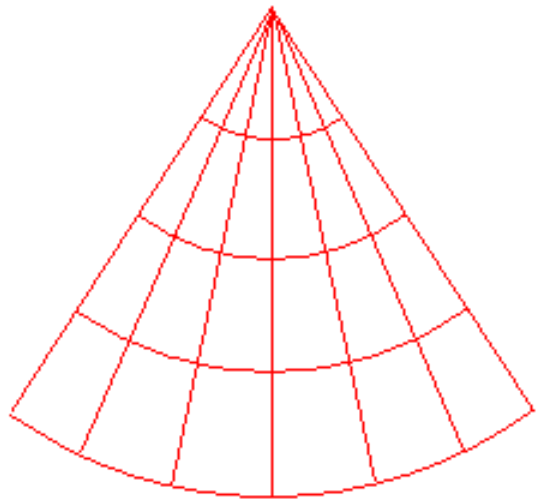
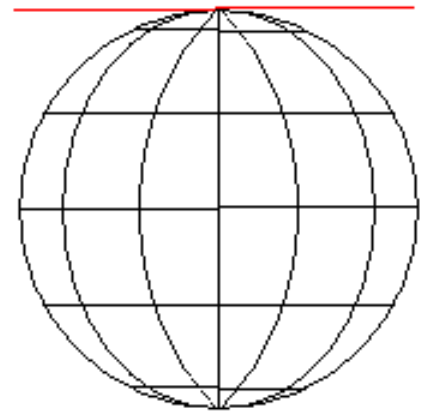
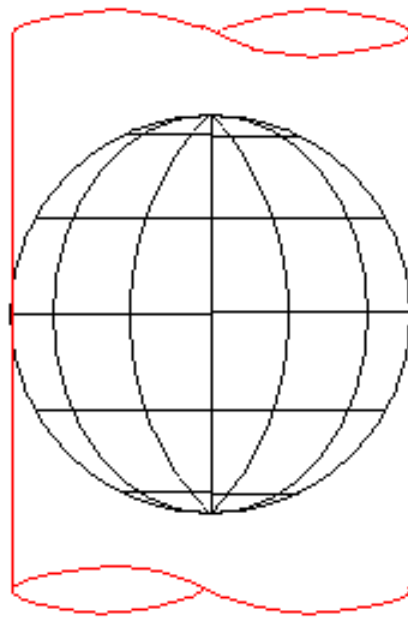
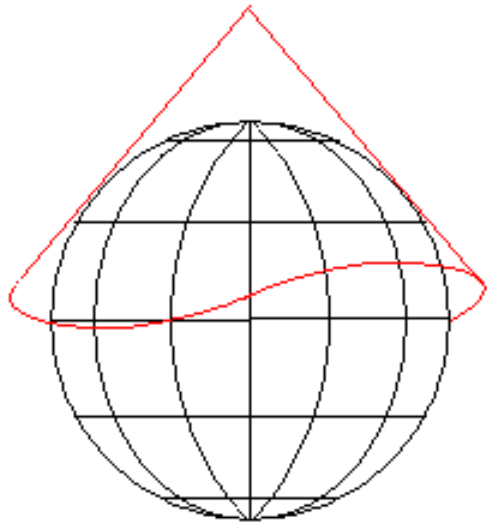
Kuželová - poledníky tvoří svazek přímek, rovnoběžky kruhové oblouky se společným středem.

Např. Ptolemaiovo (ekvidistantní kuželové), Křovákovo (konformní kuželové - část z koule na rovinu).

Válcová - poledníky jsou rovnoběžné, stejně odlehlé přímky. Rovnoběžky jsou rovnoběžné přímky.

Např. Marinovo (ekvidistantní válcové), Mercatorovo (konformní válcové).

Azimutální - vlastnosti jako kuželové.



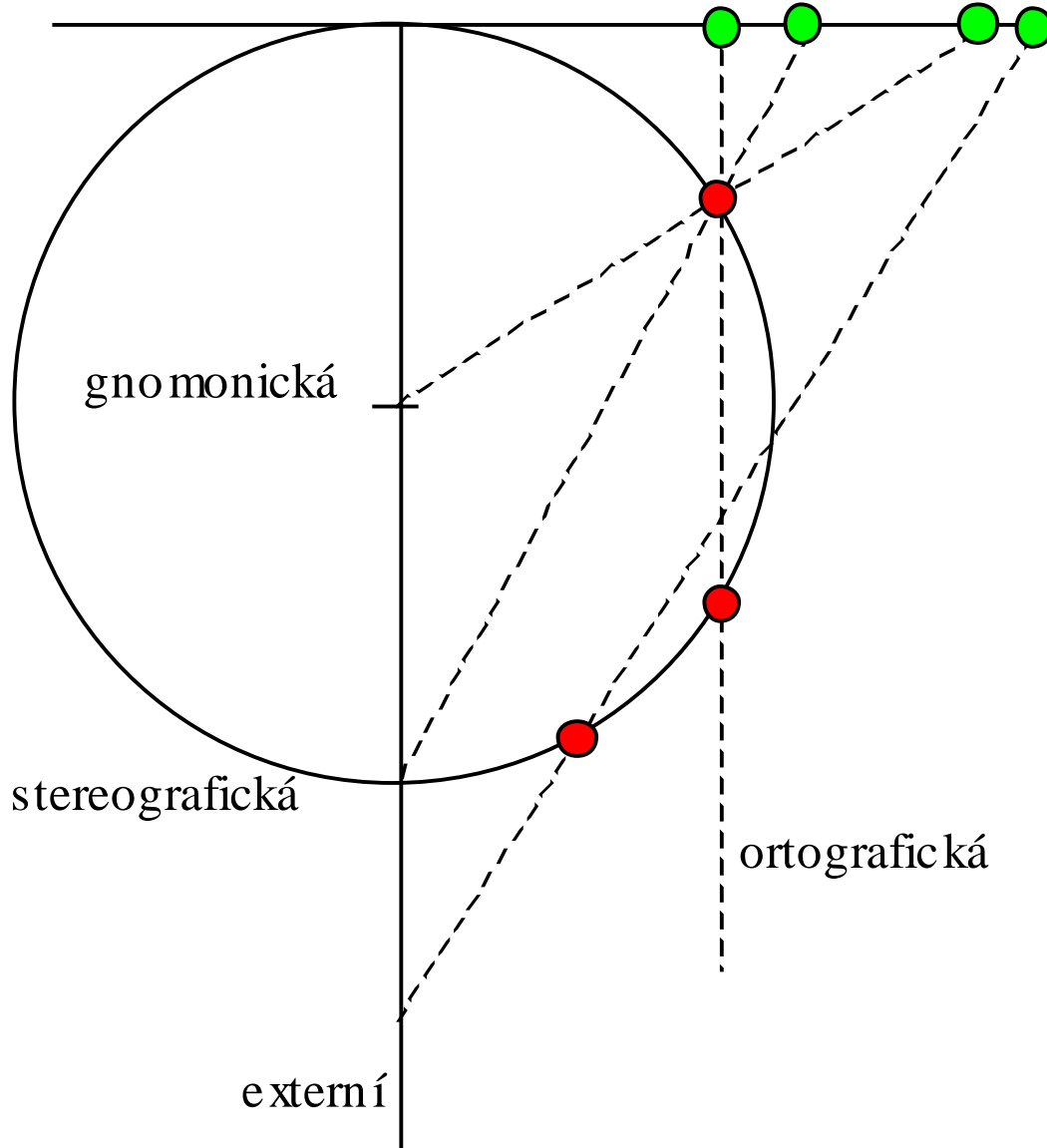
(Jednoduchá) azimutální zobrazení...

- ...zobrazovací plocha je tečná nebo sečná rovina,
- ...zobrazovací rovnice udávají polární rovinné souřadnice ρ a ε bodu v mapě tak, že počátek souřadnic leží v pólu (obvykle „bod dotyku“ roviny) a osa leží v obrazu základního poledníku,
- ...obrazy poledníků v normální poloze tvoří trs paprsků (polopřímek) vycházejících z pólu, obrazy rovnoběžek v normální poloze tvoří soustředné kružnice se středem v pólu,
- ...obecné rovnice:

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = r \cdot f(\varphi)$$

PROJEKCE



Azimutální zobrazení

Gnómonické

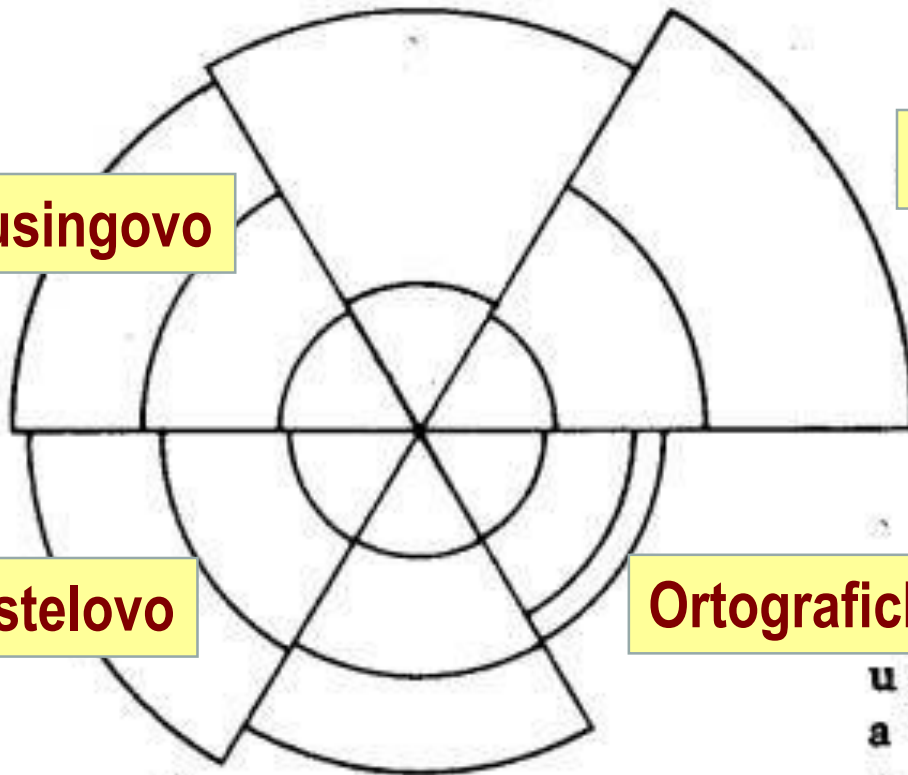
Stereografické

Breusingovo

Postelovo

Ortografické

Lambertovo



Porovnání obrazů rovnoběžek
u jednotlivých azimutálních zobrazení:
a — gnómonické, b — stereografické,
c — ortografické, d — stejnoploché,
e — ekvidistantní, f — Breusingovo.

Gnómonická projekce

$$\varepsilon = \lambda$$

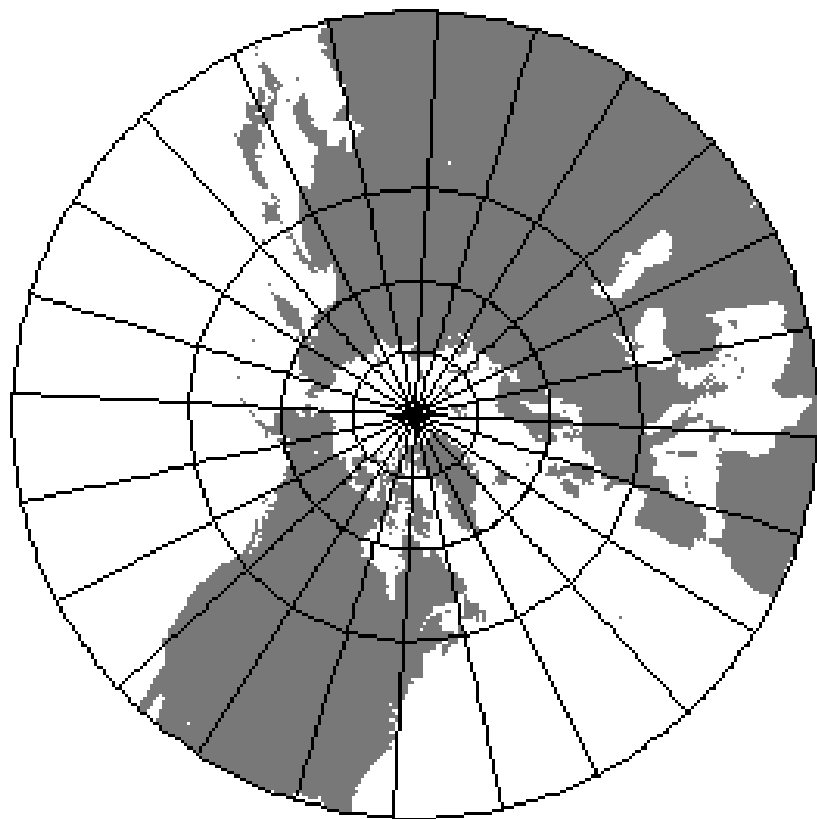
$$\rho = r \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

(Thales z Milétu, 7. století př.n.l.)

Poledníky se zobrazí jako přímky, rovnoběžky jsou kuželosečky, nelze zobrazit rovník.

Zkreslení od pólů k rovníku narůstá.

Užití v navigaci a pro zákres ortodrom (z průsečíků se zeměpisnou sítí se překreslí do jiného zobrazení).



Stereografická projekce

(Hipparchos z Nikeie, 2. století př.n.l.)

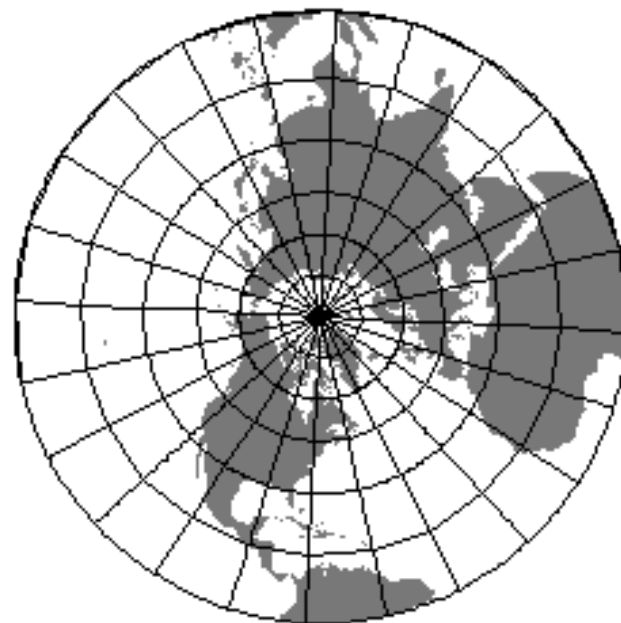
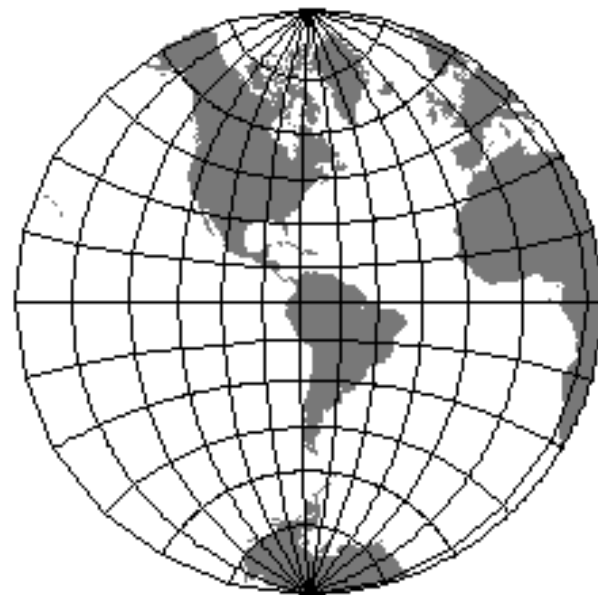
Všechny kružnice na glóbu se zobrazují opět jako kružnic, poloměr obrazu rovníku je $2r$ (r je poloměr polokoule).

Zobrazení je úhlojevné.

Nelze zobrazit naráz celý svět. Užívá se v geodézii a astronomii.

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = 2.r.\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$



Ortografická projekce

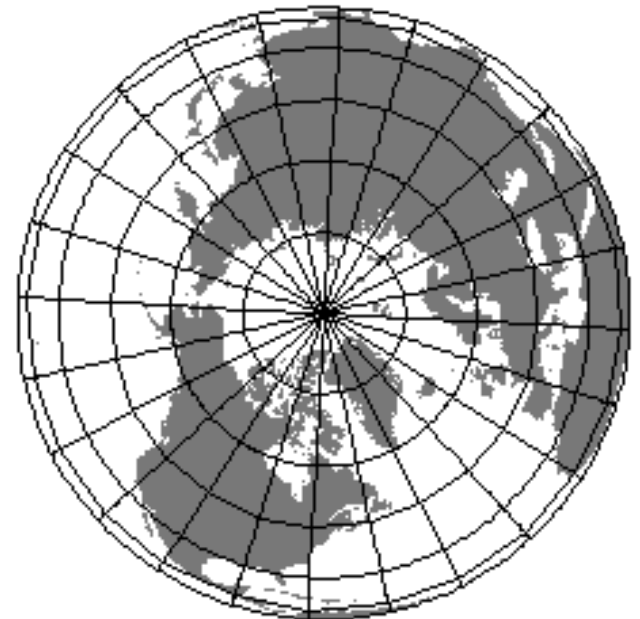
(Appollonius, 3. století př.n.l.)

Zobrazení je délkojevné podél rovnoběžek, délkové zkreslení narůstá k rovníku.

V příčné poloze se poledníky zobrazují jako části elips a rovnoběžky jako rovnoběžné přímky, v obecné poloze se obojí zobrazují jako elipsy. V příčné poloze se užívá pro mapy planet.

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = r \cdot \sin \varphi$$



Breusingovo zobrazení

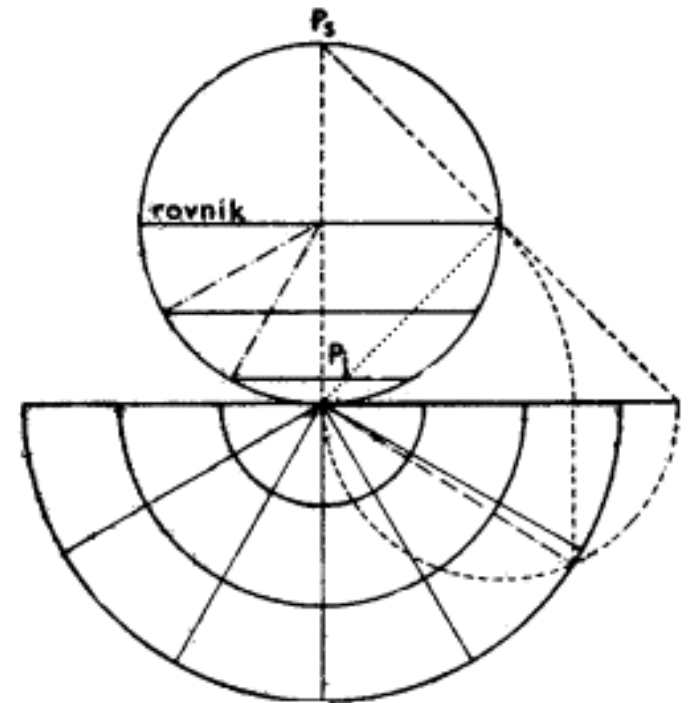
(A. Breusing, 1892)

Zobrazení představuje geometrický průměr Lambertova a stereografického zobrazení a patří mezi typická **kompensační zobrazení**.

Úhlové zkreslení je menší než u Postelova zobrazení, ale plošné zkreslení je větší. Užívá se u map malých měřítek.

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = \sqrt{2 \cdot r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$



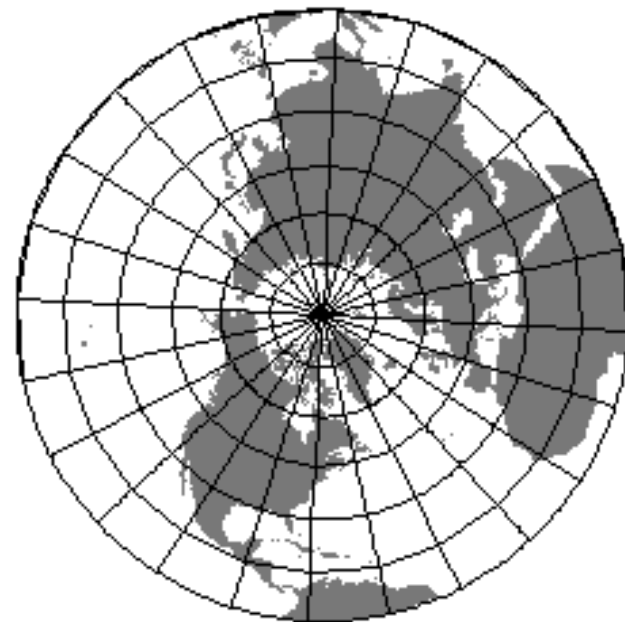
Postelovo zobrazení

(Guillaums Postel, 1581)

Zobrazení je délkojevné podél poledníků, v jiné než normální poloze mají poledníky a rovnoběžky velmi složité křivky.

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = r \cdot \text{arc } \varphi$$



Lambertovo zobrazení

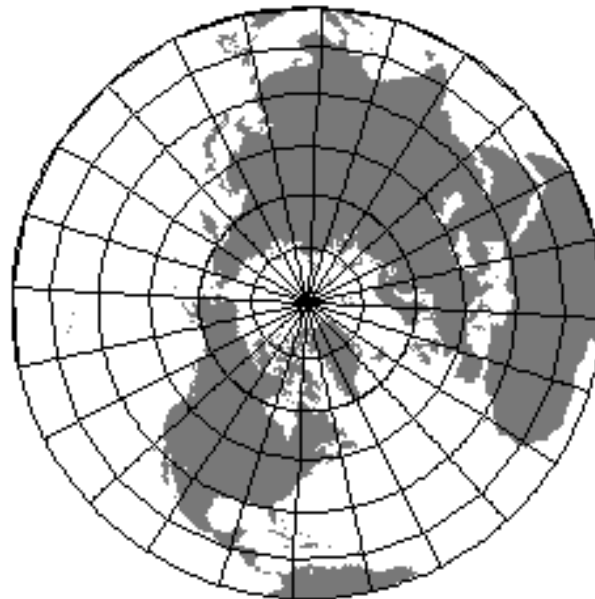
(Johan Heinrich Lambert, 1772)

Zobrazení je plochojevné, v příčné a obecné poloze mají obrazy poledníků i rovnoběžek složité křivky, vzdálenosti mezi obrazy rovnoběžek se pozvolna zmenšují od středu k okrajům.

Užívá se pro geografické úlohy a atlasové mapy).

$$\varepsilon = \lambda$$

$$\rho = 2.r.\sin\frac{\varphi}{2}$$



UPS (Universal Polar Stereographic)

Užívá se pro polární oblasti od $79^{\circ}30'$ do 90° .

Tak jako u všech stereografických zobrazení je i v tomto případě na rovinu v normální poloze dotýkající se pólu z protějšího pólu promítán elipsoid.

Jako referenční plocha byl zvolen elipsoid WGS84. Pro systém UPS bylo zvoleno měřítkové zkreslení pólu $m_0 = 0,994$, takže z dotykové roviny se stává rovina sečná. Ta elipsoid protíná přibližně kolem rovnoběžky $81^{\circ} 07'$.

Ve středu zobrazení je tedy hodnota zkreslení $m_0 = 0,994$, které roste směrem k nižším zeměpisným šířkám až na hodnotu $m_0 = 1,0016076$ na rovnoběžce $80^{\circ} 00'$. Svého maxima ($m_0 = 1,0023916$) dosahuje na rovnoběžce $79^{\circ} 30'$.

(Jednoduchá) válcová zobrazení

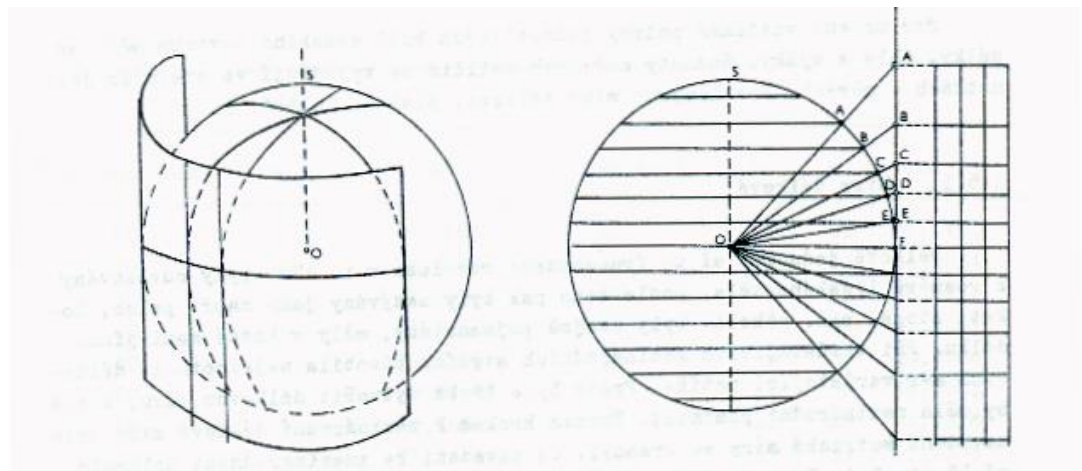
- Zobrazovací plocha je v normální poloze pláštěm válce, která se dotýká zeměkoule podle rovnoběžky nebo jiné kružnice.
- Zobrazovací rovnice udávají v normální poloze pravoúhlé rovinné souřadnice x a y bodu v mapě tak, že osa x je přímkový obraz rovníku a osa y je přímkový obraz základního poledníku kolmý na obraz rovníku.
- Obrazy poledníků v normální poloze tvoří úsečky rovnoběžné s osou y kolmé na přímkový obraz rovníku, obrazy rovnoběžek v normální poloze tvoří úsečky rovnoběžné s osou x .

Obecné rovnice:

$$x = r \cdot \text{arc} \lambda \text{ (tečný),}$$

$$x = r \cdot \text{arc} \lambda \cdot \cos \varphi_0 \text{ (sečný),}$$

$$y = r \cdot f(\varphi).$$



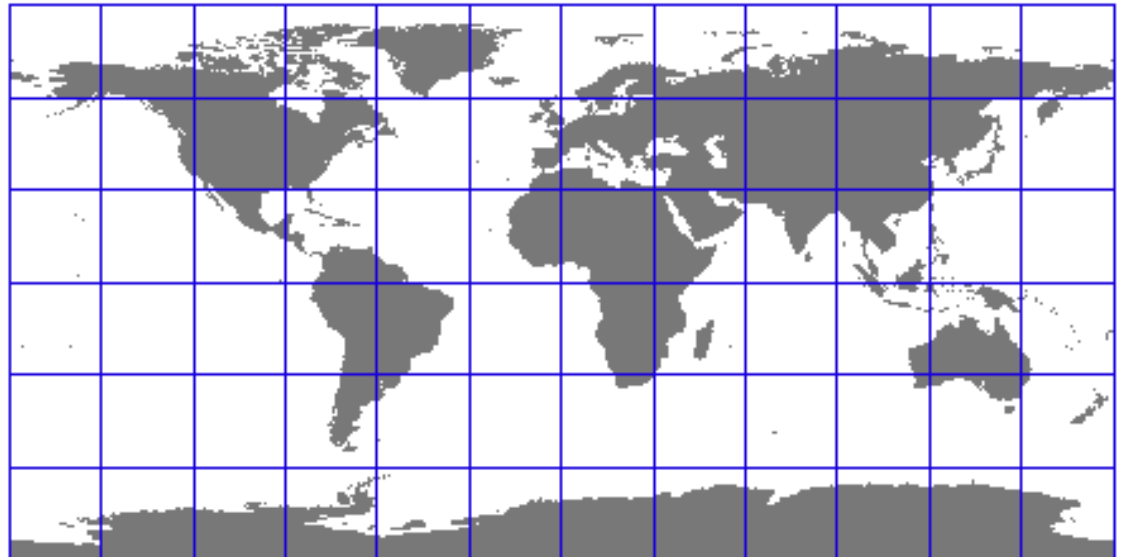
Marinovo zobrazení

(Marinos z Tyru 120 n.l., Archimédes, 3. století př.n.l.)

Zobrazení je délkojevné podél poledníků a rovníku, má velké zkreslení u pólů.

Aplikace: Cassini-Soldnerovo zobrazení - mapy Stabilního katastru, obdélníkové zobrazení - sečný válec).

$$x = r \cdot \text{arc } \lambda$$
$$y = r \cdot \text{arc } \varphi$$



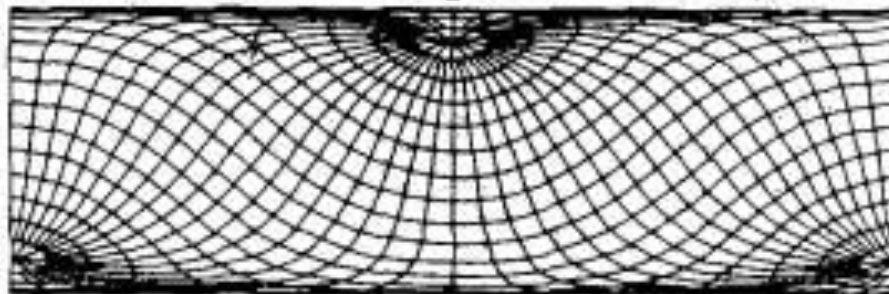
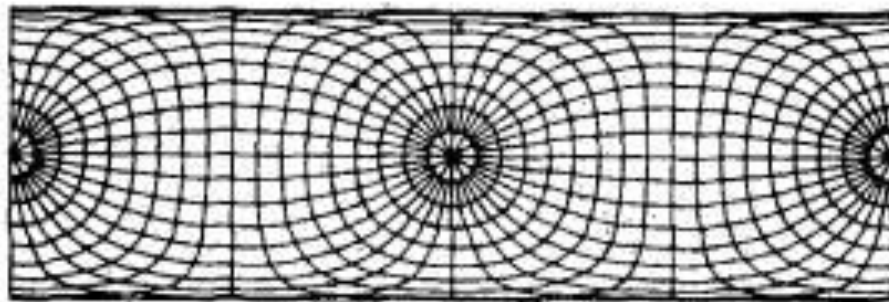
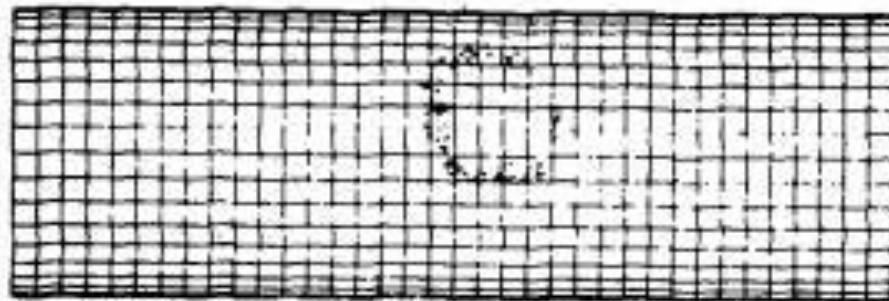
Lambertovo zobrazení

$$x = r \cdot \arccos \lambda$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

(Johan Heinrich Lambert,
1772)

Zobrazení je plochojevné a dále délkojevné podél rovníku. Používá se málo, protože má velké úhlové zkreslení.

- Plochojevnost se zachová, jestliže afinně zkreslíme mapu tak, že souřadnici x násobíme koeficientem n a souřadnici y hodnotou $1/n$.
- Položíme-li $n = \cos \varphi_0$, budou délkově zachovány rovnoběžky $\pm \varphi_0$.

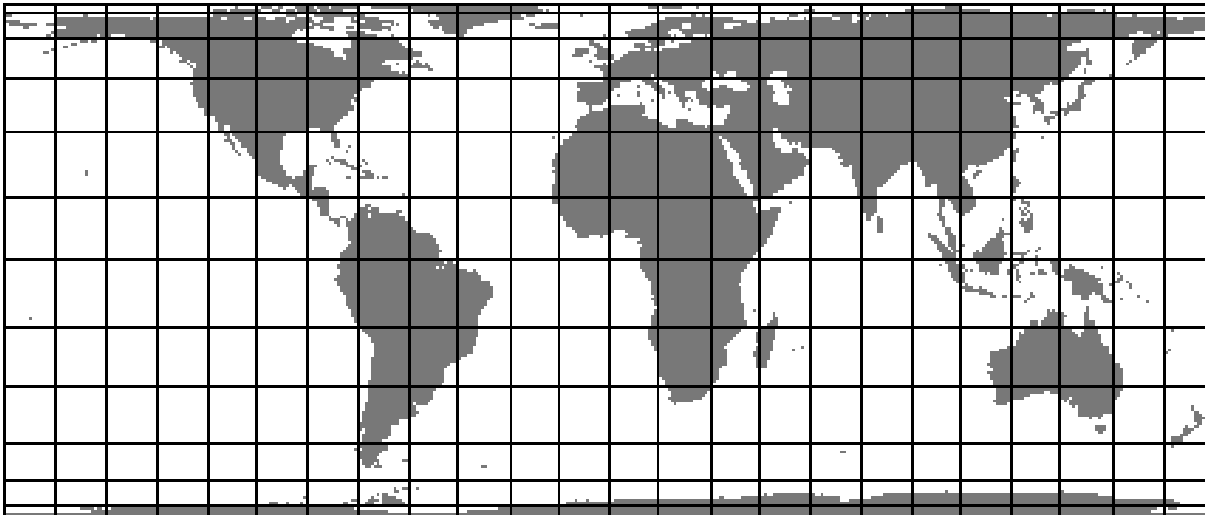


Behrmannovo zobrazení

(W. Behrmann, 1909)

Zobrazení představuje aplikaci Lambertova zobrazení.

Pro $\varphi_0 = \pm 30^\circ$ je plochojevné a současně podél těchto rovnoběžek i délkojevné.



$$x = r \cdot \cos \varphi_0 \cdot \text{arc } \lambda$$

$$y = r \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0}$$

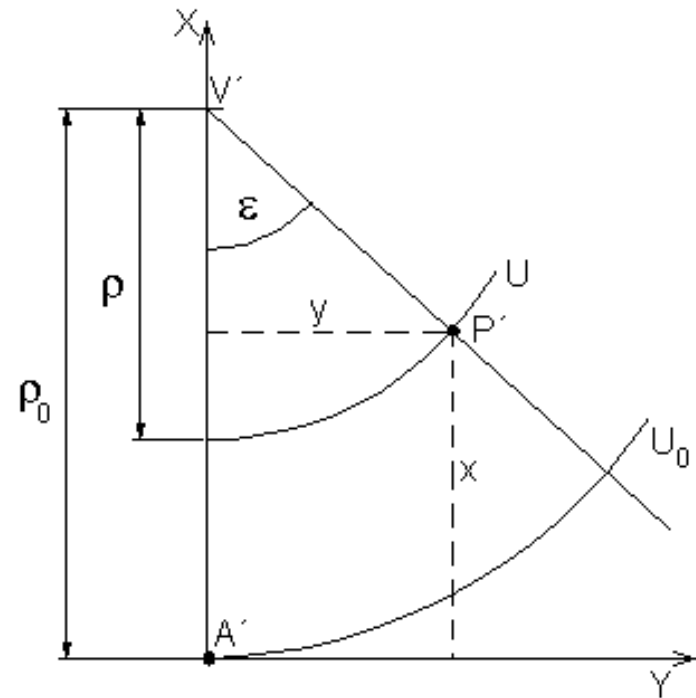
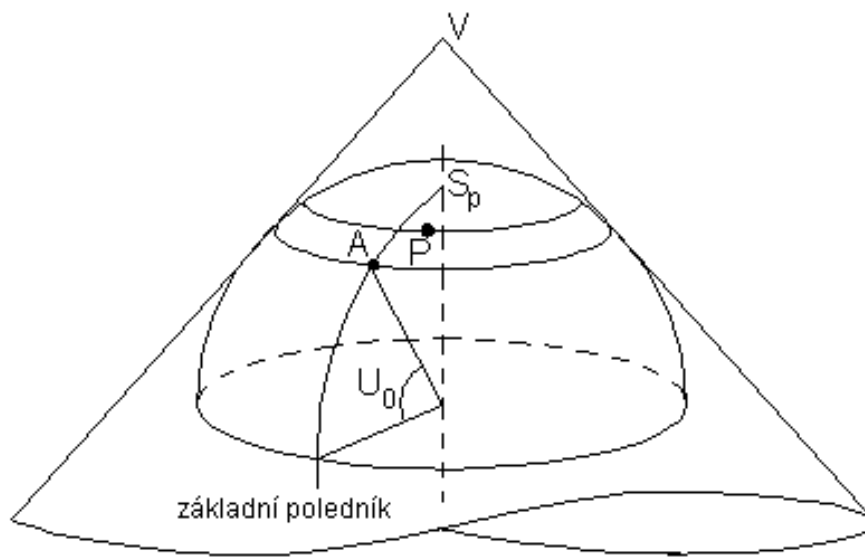
Samostatná prezentace

Viz samostatná prezentace:

KARTOGRAFIE_I_08_ZOBRAZENI_UREDNI

- Cassini-Soldnerovo zobrazení
- Gaussovo-Krügerovo zobrazení
- Mercatorovo zobrazení

(Jednoduchá) kuželová zobrazení

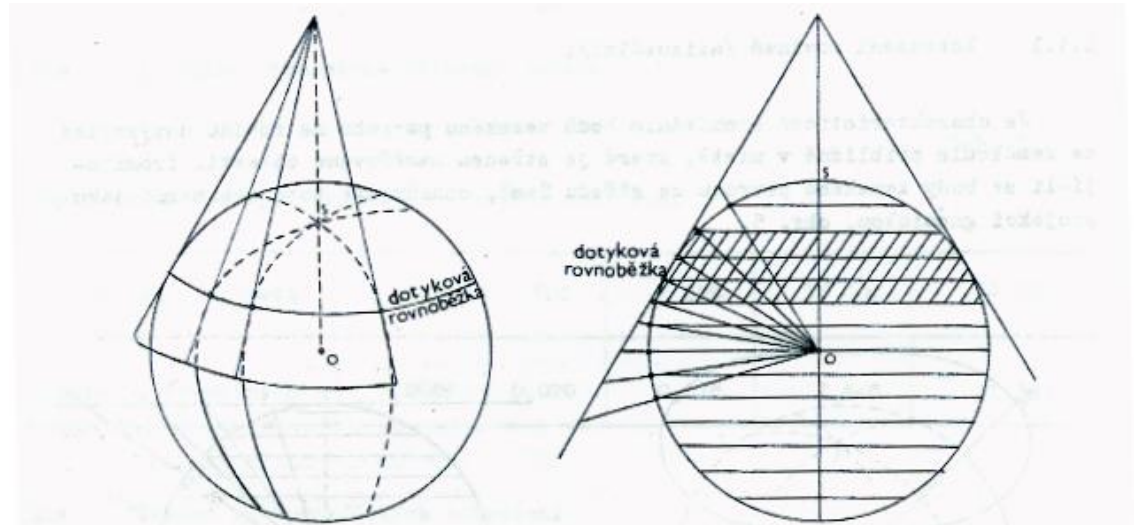


Kuželová zobrazení

Zobrazovací plochu tvoří plášť kužele.

Zobrazovací rovnice udávají polární rovinné souřadnice ρ a ε bodu v mapě tak, že osu souřadnice tvoří polopřímka ležící v obrazu základního poledníku, ovšem počátek souřadnic nemusí ležet v pólu (leží v obrazu vrcholu kužele, tj. v obraze kartografického pólu).

Plášť kužele se dotýká zeměkoule podle rovnoběžky nebo jiné kružnice



Kuželová zobrazení

Obrazy poledníků v normální poloze tvoří trs paprsků (polopřímek) procházejících počátkem souřadnicového systému (kartografickým pólem), obrazy rovnoběžek v normální poloze jsou části soustředných kružnic se středem v počátku souřadnic.

V příčné a šikmé poloze jsou obrazy poledníků a rovnoběžek složité křivky (v příčné poloze se nepoužívá, v obecné poloze pro území protáhlá podle vedlejších kružnic, např. ČSR, Japonsko).

Kuželová zobrazení

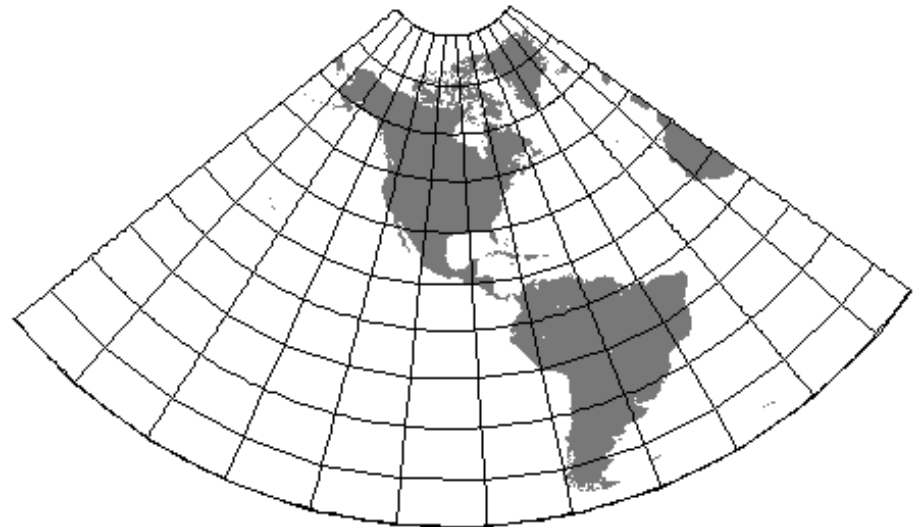
- Dotykové kružnice se zobrazuje nezkresleně.
- Výška kužele se volí tak, aby dotyková kružnice zobrazovanou oblast pŕilila.
- Zkreslení se zvětšuje na obě strany od dotykové kružnice.

Ptolemaiovo zobrazení

(Ptolemaios, 2. století n.l.)

Zobrazení je délkojevné podél poledníků, délkojevné jsou i dotykové rovnoběžky φ_0 . Zkreslení přibývá rychleji k pólu než k rovníku.

Jde o velmi používané zobrazení pro geografické mapy ve školních atlasech.



Lambertovo zobrazení

(Johan Heinrich Lambert, 1772)

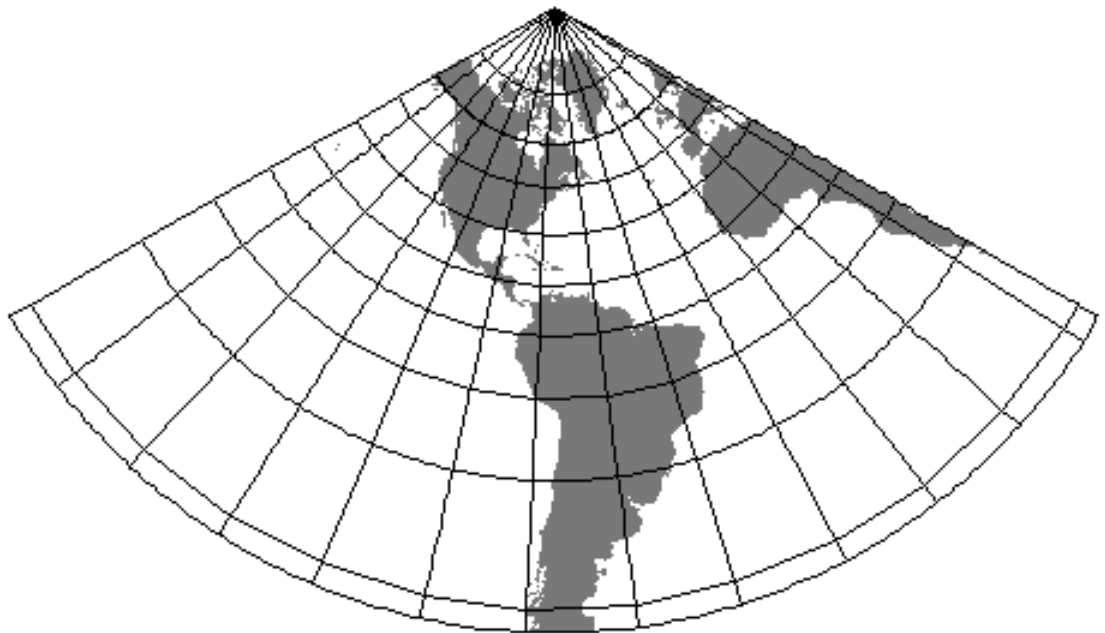
Zobrazení je plochojevné, rovnoběžka φ_0 je délkojevná.

Zobrazení má velké úhlové zkreslení, proto se využívá málo.

$$\varepsilon = \lambda \cdot \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\rho = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} : \cos \frac{\varphi_0}{2}$$

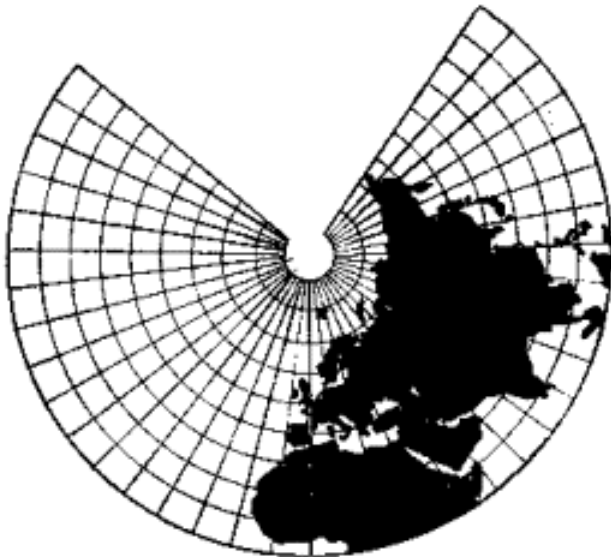
$$n = \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}$$



Delislovo zobrazení

(Josef Nicholas de l'Isle)

Zobrazení má dvě délkojevné rovnoběžky, nejsou ale sečné. Je délkojevné podél $\varphi_{1,2}$ a podél poledníků. Plochy a úhly zkresluje méně než Ptolemaiovo zobrazení.



$$\rho = r \cdot \left(\frac{\text{arc } \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - \text{arc } \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} + \text{arc } \varphi \right)$$

$$\varepsilon = \lambda \cdot \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\text{arc}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Gaussovo zobrazení

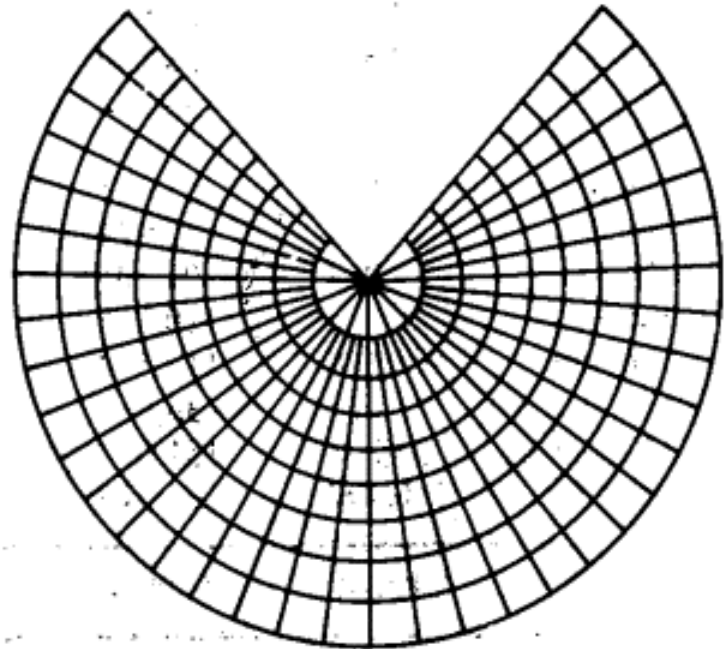
(Karl Friedrich Gauss)

Zobrazení je úhlojevné, délkojevné podél φ_0 , vzdálenosti mezi rovnoběžkami od φ_0 narůstají.

Používá se v geodézii a v letectví (Mezinárodní letecká mapa a Mezinárodní mapa světa).

$$\varepsilon = \lambda \cdot \cos \varphi_0$$

$$\rho = r \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot \cot g \frac{\varphi_0}{2} \right)^{\cos \varphi_0}$$



Samostatná prezentace

Viz samostatná prezentace:

KARTOGRAFIE_I_08_ZOBRAZENI_UREDNI

- Benešovo zobrazení
- Křovákovo konformní kuželové zobrazení

Nepravá zobrazení

Zobrazovací plochou nemusí být rovina, plášť válce ani plášť kužele. Sít' poledníků a rovnoběžek netvoří ortogonální sít', nelze vytvořit zobrazení konformní.

V normální poloze alespoň jedna ze zobrazovacích rovnic obsahuje dvě proměnné, a to φ a/nebo λ .

Mohou se vyskytovat ve variantách (pseudo)azimutální, (pseudo)cylindrická a (pseudo)konická, z jiného úhlu pohledu pak i jako zobrazení **kompozitní** (plocha je sice souvislá, ale „nastřížená“).

Nepravá zobrazení

- (Pseudo)azimutální - Hammerovo, Aitovo, Werner Stabbovo (srdíčko).
- (Pseudo)kuželová - Bonneovo (ekvidistantní v rovnoběžkách).
- (Pseudo)válcová - sinusoidální (Mercator-Sansonovo, Eckertovo sinusoidální, McBrydeovo), eliptická (Mollweidovo, Eckertovo eliptické) aj.

Nepravá zobrazení

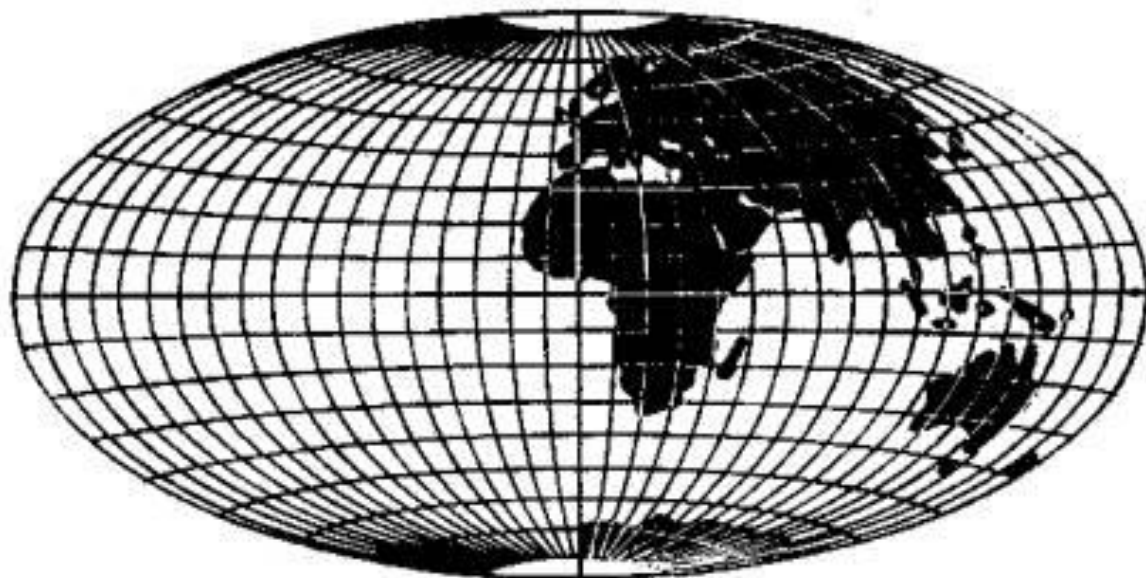
Nepravých válcových zobrazení bylo odvozeno velké množství. Rozlišit je lze např. podle:

- tvaru obrazu poledníků (zobrazení sinusoidální, eliptická, kružnicová, přímková, ostatní),
- tvaru obrazu pólu (pól se zobrazuje jako bod nebo jako úsečka),
- zkreslení (zobrazení ekvivalentní, vyrovnávací; v žádném případě konformní),
- odlehlosti obrazu rovnoběžek (konstantní, obecná),
- jména autora, který zobrazení navrhnul.

Hammerovo zobrazení

(Ernest von Hammer, 1892)

Pseudoazimutální zobrazení, vychází z Lambertova zobrazení v příčné poloze. Souřadnice y-průsečíků sítě se ponechají a x-souřadnice se dvojnásobí, obrazy poledníků se přečíslují.



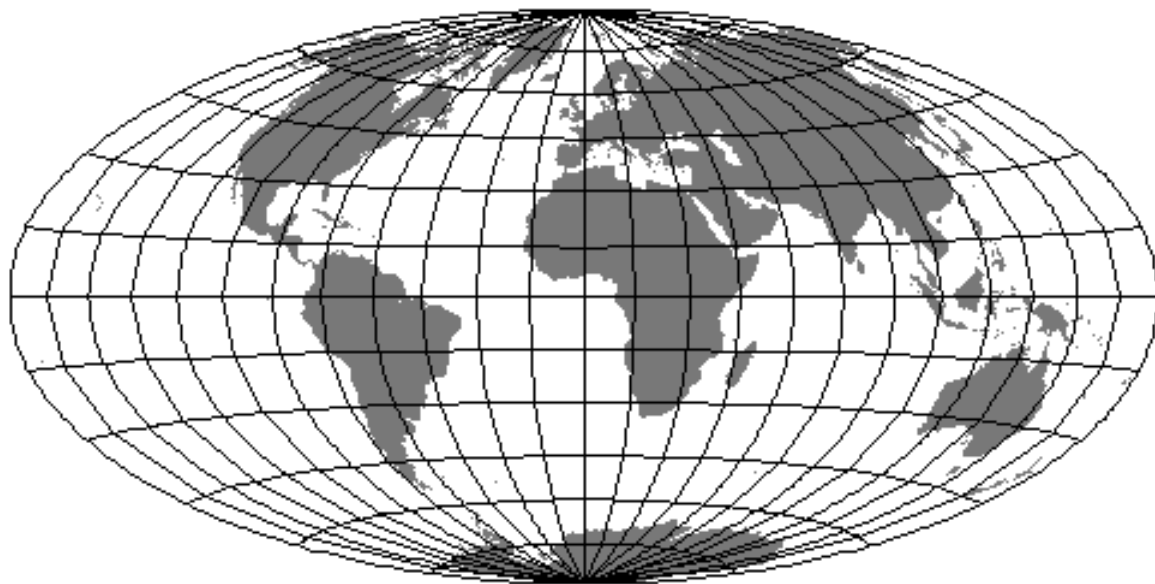
$$y = \frac{\sqrt{2} \cdot r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cdot \cos \frac{\lambda}{2}}}$$

$$x = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{1 + \cos \varphi \cdot \cos \frac{\lambda}{2}}}$$

Aitovovo zobrazení

$$x = r \cdot \arccos \left[\cos \varphi \cdot \cos \frac{\Delta \lambda}{2} \right] \cdot \cos D$$

$$y = 2 \cdot r \cdot \arccos \left[\cos \varphi \cdot \cos \frac{\Delta \lambda}{2} \right] \cdot \sin D$$

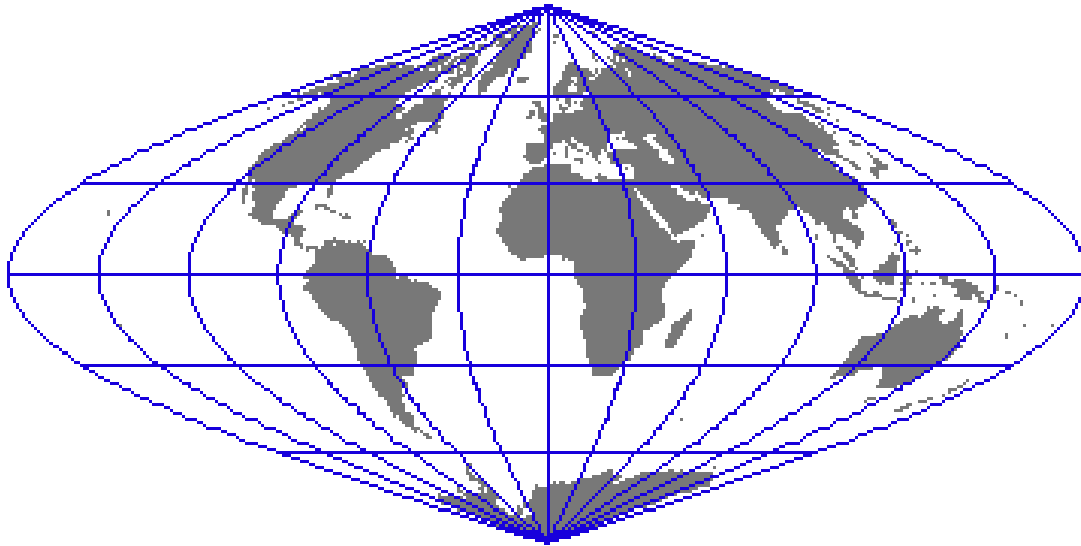


(David Aitov)

Pseudoazimutální
zobrazení,
vyrovnávací,
délkojevný je rovník
a střední poledník.

Sansonovo zobrazení

Pseudocylindrické zobrazení, vychází z Marinova zobrazení.
Přímkové obrazy rovnoběžek jsou délkojevné.



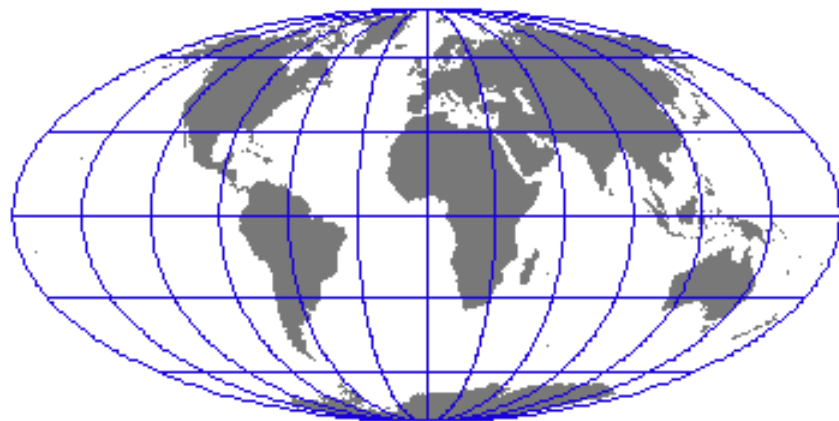
$$x = r \cdot \text{arc}\lambda \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \text{arc}\varphi$$

Mollweidovo zobrazení

(Karl B. Mollweide)

Pseudocylindrické zobrazení, obrazy rovnoběžek jsou přímkové, kolmé na střední poledník, zhušťují se k pólům, střední poledník je přímkový, ostatní eliptické. Zobrazení je plochojevné a délkojevné podél $\varphi_0 = \pm 45,767^\circ$.



$$x = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot r \cdot \cos \psi \cdot \text{arc} \lambda$$

$$y = r \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \psi$$

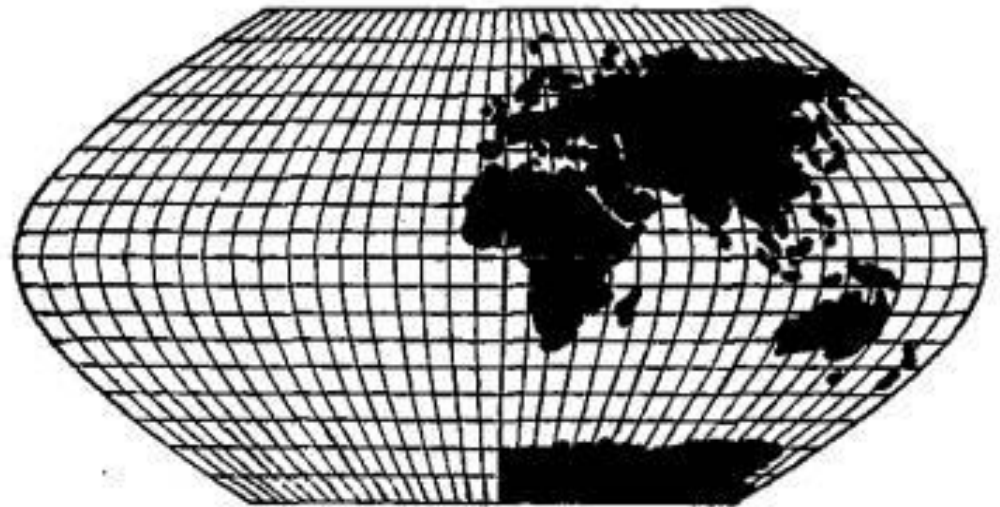
Eckertovo zobrazení

(Max Eckert, 1906)

Pseudocylindrické zobrazení, základní poledník a oba póly jsou úsečky o poloviční délce rovníku, poledníky mají sinusoidální průběh. Zobrazení je plochojevné a délkojevné podél $\varphi_0 = \pm 49,268^\circ$.

$$x = 0,882.r.\text{arc}\lambda.\cos^2 \frac{\psi}{2}$$

$$y = 0,882.r.\text{arc}\psi$$



(Rigobert Bonne, 1752)

Pseudokonické plochojevné zobrazení vychází z Ptolemaiova zobrazení.

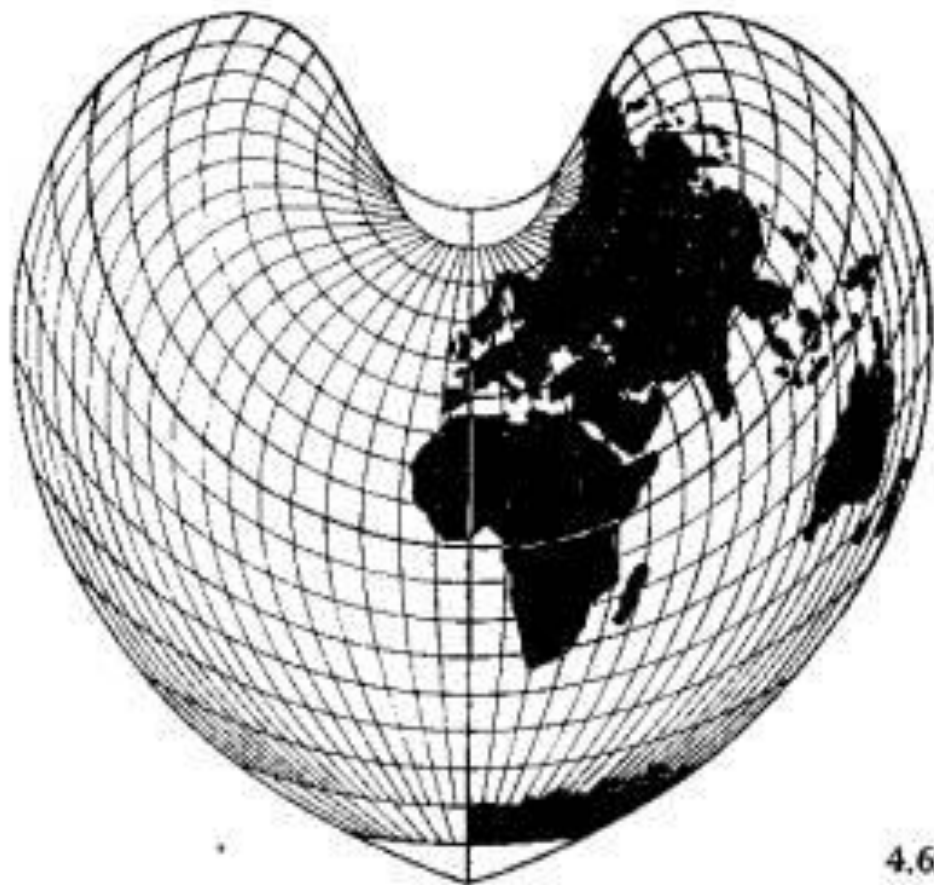
Obrazy rovnoběžek a střední poledník jsou délkojevné.

Dříve se využívalo pro mapy světadílů. Při $\varphi_0 = 0^\circ$ přechází v Sansonovo zobrazení.

$$\rho = r \cdot [\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{arc}(\varphi - \varphi_0)]$$

$$\varepsilon = \frac{360^\circ \cdot \sin \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{arc}(\varphi - \varphi_0)}$$

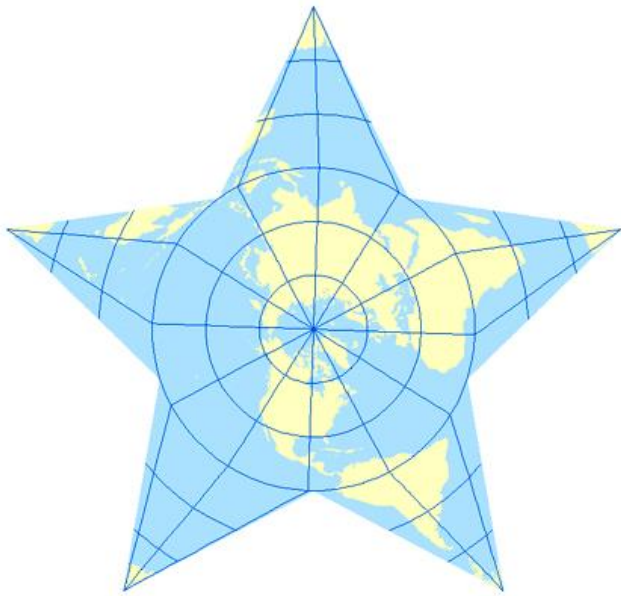
Bonneovo zobrazení



Nepravá zobrazení (kompozitní)

Zobrazení **Berghaus Star** je ekvidistantní kompozitní modifikované azimutální zobrazení, které zobrazí poledníky jako úsečky, zalomené na rovníku. Rovnoběžky se zobrazí jako koncentrické kruhové oblouky.

Kartografickým pólem je severní zeměpisný pól. Póly se zobrazí jako body. Zobrazení je radiálně symetrické podle severního zeměpisného pólu. Zobrazení je ekvidistantní v polednicích na severní polokouli a v základních polednicích trojúhelníkových listů hvězdy na jižní polokouli.



Zobrazení složená

- 1) Polycylindrická zobrazení (např. Gaussovo-Krügerovo nebo UTM aplikovaná na velké územní celky, resp. celou zeměkouli).
- 2) Polykonické zobrazení (např. Hasslerovo ekvidistantní zobrazení, kruhová zobrazení Nicolosiho, Van der Grintenovo a Lagrangeovo-Lambertovo).
- 3) Polyedrická (mnohostěnná) zobrazení.

Mnohostěn má povrch skládající se z mnohoúhelníkových stěn, které se setkávají v úsečkami tvořených hranách. Vyjdeme-li z této obecné vlastnosti polyedru (mnohostěnu), pak do této podskupiny není vhodné řadit předcházející dvě podskupiny (ad1) a (ad2) - (u nich nedochází na kontaktu rovnoběžkových vrstev a poledníkových pásů ke skokové úhlové změně při přechodu ze stěny na stěnu – nevytvoří se hrana). V praxi se tak velmi často děje.

Hasslerovo (americké) zobrazení

- Základním polykónickým zobrazením ekvidistantním v rovnoběžkách s nezkresleným základním poledníkem a rovníkem, jejichž obrazem je úsečka, je **Hasslerovo ekvidistantní zobrazení z roku 1820 (též jednoduché americké polykónické zobrazení)**.
- Bylo původně použito pro Mezinárodní mapu světa v měřítku 1 : 1 mil.
- Je využíváno v USA (topografické mapy pro hydrografické účely), není vhodné pro zobrazení celé Země.

(Ferdinand Rudolph Hassler, 19. století)

Obraz rovníku je přímkový a délkojevný, obraz středního poledníku je přímkový a délkojevný, obrazy ostatních rovnoběžek jsou délkojevné kružnice, jejichž středy leží na základním poledníku.

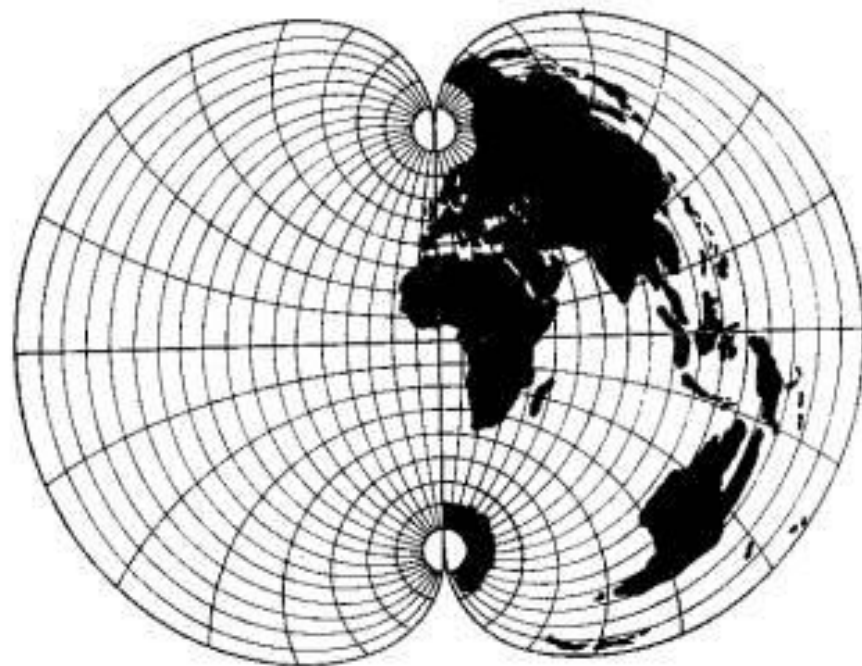
Obrazem ostatních rovnoběžek jsou kružnice, jejichž středy leží na základním poledníku.

Zobrazení má velké zkreslení při okrajích, proto se používá jen střední část.

$$\rho = r \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

$$y_0 = \rho + \operatorname{arc} \varphi$$

Hasslerovo (americké) zobrazení



Zobrazení složená

- Typickým polyedrickým zobrazením je **Sanson-Flamsteedovo zobrazení** použité pro topografické mapy třetího vojenského mapování Rakouska-Uherska.
- Viz samostatná prezentace:
KARTOGRAFIE_I_08_ZOBRAZENI_UREDNI

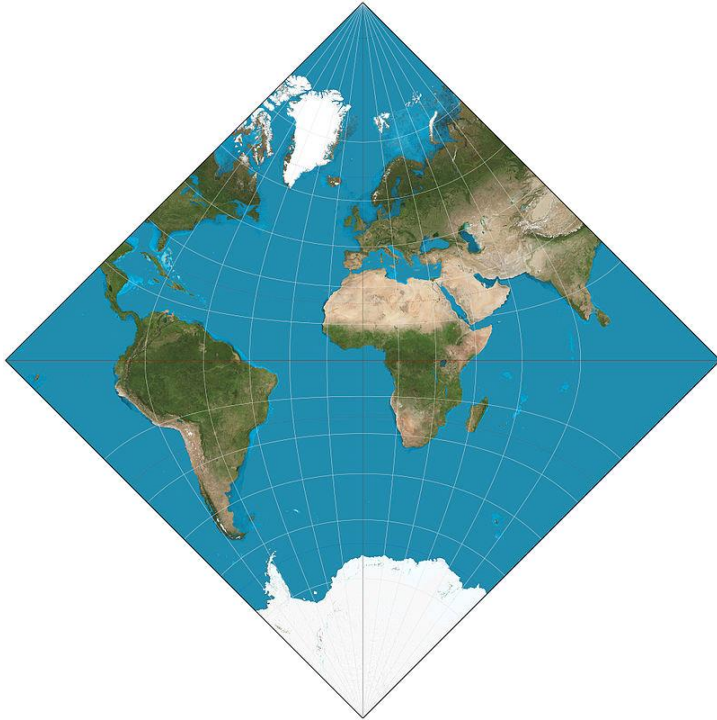
Zobrazení obecná (neklasifikovaná)

- Zobrazení obecná (též jiná, složitá, resp. neklasifikovaná) jsou taková zobrazení, v nichž obrazy poledníků a rovnoběžek tvoří křivky vyšších stupňů a která nemůžeme jednoznačně zařadit do některých z předešlých skupin. Vznik zobrazení není geometricky představitelný a odvození zobrazovacích rovnic je provedeno čistě matematickou cestou (každá rovinná souřadnice je funkcí obou souřadnic na referenční ploše).

$$X = f(U, V); Y = g(U, V)$$

- Zeměpisné poledníky a rovnoběžky se zobrazují jako křivky různých tvarů, které obecně nejsou vzájemně ortogonální. Většina těchto zobrazení je vyrovnávacích, ale může se jednat i o zobrazení konformní.

Zobrazení obecná (neklasifikovaná)



Adamsovo konformní zobrazení (vlevo), Armadillovo zobrazení (vpravo)

Volba zobrazení

Velikost území - s narůstající velikostí území se zvětšuje zkreslení v okrajových částech \Rightarrow jednoduchá zobrazení (azimutální nebo kuželová). Pro mapy Země - nepravá nebo mnohokuželová zobrazení.

Tvar území - malé hodnoty zkreslení \Rightarrow co nejbližší k dotykovým nebo sečným křivkám:

- okrouhlá území - azimutální zobrazení,
- protáhlá území - kuželová nebo válcová zobrazení.

Literatura a vybrané použité zdroje:

- Buchar P., Hojovec V.: Matematická kartografie, ČVUT Praha
- Böhm J.: Matematická kartografie I, II.
- Hojovec V.: Kartografie
- Srnka E.: Matematická kartografie
- Vykutil J. : Vyšší geodézie
- Snyder J. P., Bugayevskiy L. M.: Map projections. Taylor & Francis

Internetové zdroje:

- WinKart: www.winkart.cz
- Proj4: <http://proj.maptools.org/>
- GMT (Linux): <http://proj.maptools.org/>
- <http://old.gis.zcu.cz/>